

**Brückenkurs**

**Formale Konzepte: Lösungen**

**3. Auflage**

Michael Färber

27. September 2013

# Inhaltsverzeichnis

1	Definition, Satz, Beweis	3
2	Summen und Produkte	5
3	Mengen	6
4	Abbildungen	8
5	Vollständige Induktion	9
6	Matrizen	11

# 1 Definition, Satz, Beweis

**Aufgabe 1.1.** Vielfache.

	$a$	$b$	$c$
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	$\perp$
1.	2	2	1
	2	4	$\perp$
	4	2	2
	5	3	$\perp$
	5	25	$\perp$

2.  $n \in \mathbb{Z} \implies n$  Vielfaches von 9  $\implies n$  Vielfaches von 3  
 Definitionen einsetzen:  $\exists c : n = 9 \cdot c \implies \exists d : n = 3 \cdot d$   
 Existenzquantor links auflösen:  $n = 9 \cdot c = 3 \cdot 3 \cdot c$ , somit gilt das Ziel mit  $d = 3 \cdot c$

**Aufgabe 1.2.** Dominanz.

	$a$	$b$	$a \text{ Dom } b$
	0	0	$\perp$
	0	1	$\perp$
1.	1	0	$\top$
	5	3	$\top$
	7	8	$\perp$
	-2	3	$\perp$
	3	-2	$\top$

2.  $a \text{ Dom } b$  gdw  $a > b$ .
3. Transitivität der Dominanz-Relation:  $n \text{ Dom } m \implies m \text{ Dom } p \implies n \text{ Dom } p$   
 Definitionen einsetzen:  $\exists c : n = m + c \implies \exists d : m = p + d \implies \exists e : n = p + e$   
 Existenzquantoren links auflösen:  $n = m + c = p + d + c$ , somit gilt das Ziel mit  $e = c + d$

**Aufgabe 1.3.** Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Indirekter Beweis:

Annahme: Es gibt nicht unendlich viele natürliche Zahlen.

Dann existiert eine größte natürliche Zahl  $m$  mit  $\neg(\exists n \in \mathbb{N} : n > m)$ . Allerdings gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \in \mathbb{N}$ , und somit gilt  $m+1 \in \mathbb{N}$ . Da  $m+1 > m$ , ergibt sich ein Widerspruch.

Deshalb existieren unendlich viele natürliche Zahlen.

**Aufgabe 1.4.**  $n + 1$  ungerade  $\implies n$  gerade.

Nach Definition 1.2 existiert kein  $a$  mit  $n + 1 = 2 \cdot a$ , daher gilt  $n + 1 = 2 \cdot b + 1$  für ein gewisses  $b$ . Durch Umformen erhalten wir  $n = 2 \cdot b$ , weshalb laut Definition 1.2  $n$  gerade ist.

**Aufgabe 1.5.** Hilbertsches Barbier-Paradoxon: Die Definition eines Barbiers  $b$  entspricht

$$\forall x : (\neg R(x, x) \longleftrightarrow R(b, x)),$$

wobei  $R(x, y)$  ausdrückt, dass  $x$   $y$  rasiert. Unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Der Barbier rasiert sich selbst:  $R(b, b)$ . Dann gilt allerdings  $\neg R(b, b)$ , was einen Widerspruch darstellt.
2. Der Barbier rasiert sich nicht selbst:  $\neg R(b, b)$ . Dann gilt allerdings  $R(b, b)$ , was ebenfalls einen Widerspruch darstellt.

Daher ist nicht entscheidbar, ob ein Barbier sich selbst rasiert oder nicht.

## 2 Summen und Produkte

**Aufgabe 2.1.** Zahlenwerte berechnen.

1.  $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \dots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + \dots + (5 + 6) = 11 \cdot 5 = 55.$

2.  $\sum_{i=1}^5 (i + 1)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90.$

3.  $\prod_{i=1}^5 i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 = 120.$

**Aufgabe 2.2.** Gleichheiten.

a) bis c) gelten, d) gilt nicht

e)  $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^n (n + 1 - i).$

f)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= \sum_{i=1}^n (n + 1 - i) \\ &= \sum_{i=1}^n (n + 1) + \sum_{i=1}^n (-i) \\ &= (n + 1)n - \sum_{i=1}^n i.\end{aligned}$$

Daher  $2 \sum_{i=1}^n i = (n + 1)n.$

### 3 Mengen

**Aufgabe 3.1.** Die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ist  $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} : n = 2a + 1\}$ .

**Aufgabe 3.2.**  $M = \{1, 2, 4\}$ ,  $N = \{1, 3, 4\}$ .  $M \not\subseteq N$ ,  $N \not\subseteq M$ .

1.  $M \cap N = \{1, 4\}$ .
2.  $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$ .
3.  $M \setminus N = \{2\}$ .
4.  $N \setminus M = \{3\}$ .

**Aufgabe 3.3.** Inklusions-Beweise.

1. Zu zeigen:  $M \subseteq M \cup N$ . Also  $x \in M \implies x \in M \cup N$ .  
 $x \in M \implies x \in \{a \mid a \in M\} \implies x \in \{a \mid a \in M \vee a \in N\} \implies x \in M \cup N$ .
2. Zu zeigen:  $M \cap N \subseteq M$ . Also  $x \in M \cap N \implies x \in M$ .  
 $x \in \{a \mid a \in M \wedge a \in N\} \implies x \in \{a \mid a \in M\} \implies x \in M$ .
3. Zu zeigen:  $M = (M \setminus N) \cup (M \cap N)$ .

$$\begin{aligned}(M \setminus N) \cup (M \cap N) &= \{a \mid a \in \{b \in M \mid b \notin N\} \vee a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in N\}\} \\ &= \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \notin N) \vee (b \in M \wedge b \in N)\}\} \\ &= \{a \mid a \in \{b \in M \mid b \in N \vee b \notin N\}\} \\ &= \{a \mid a \in M\} \\ &= M.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.4.**  $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$ .

$$\begin{aligned}(M \cap P) \cup (N \cap P) &= \{a \mid a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in P\} \vee a \in \{b \mid b \in N \wedge b \in P\}\} \\ &= \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \in P) \vee (b \in N \wedge b \in P)\}\} \\ &= \{a \mid a \in \{b \mid b \in P \wedge (b \in M \vee b \in N)\}\} \\ &= \{a \mid a \in P \wedge a \in M \cup N\} \\ &= P \cap (M \cup N).\end{aligned}$$

### 3 Mengen

**Aufgabe 3.5.**  $(M \cap P) \cup (N \cap P) \subseteq (M \cap N) \cup P$ .

$$\begin{aligned}x \in (M \cap P) \cup (N \cap P) &\implies x \in \{a \mid a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in P\} \vee a \in \{b \mid b \in N \wedge b \in P\}\} \\&\implies x \in \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \in P) \vee (b \in N \wedge b \in P)\}\} \\&\implies x \in \{a \mid a \in \{b \in P\}\} \\&\implies x \in \{a \mid a \in P \vee a \in M \cap N\} \\&\implies x \in P \cup (M \cap N).\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.6.** Nicht-Inklusion.

1. Zu zeigen:  $M \setminus N \neq \emptyset \implies M \setminus N \not\subseteq M \cap N$ .

Es gilt für alle Mengen  $A, B$ :  $A \not\subseteq B \iff \exists x \in A : x \notin B$ . Daher müssen wir zeigen, dass  $\exists x \in M \setminus N : x \notin M \cap N$ .

$$\begin{aligned}M \setminus N \neq \emptyset &\iff \exists x \in M \setminus N \\&\iff \exists x \in \{a \in M \mid a \notin N\} \\&\iff \exists x : x \in M \wedge x \notin N \\&\iff \exists x : x \in M \wedge x \notin N \wedge x \notin \{a \mid a \in M \wedge a \in N\} \\&\iff \exists x : x \in M \wedge x \notin N \wedge x \notin M \cap N \\&\iff \exists x \in \{a \in M \mid a \notin N\} : x \notin M \cap N \\&\iff \exists x \in M \setminus N : x \notin M \cap N.\end{aligned}$$

2. Zu zeigen:  $M \setminus N = \emptyset \implies M \setminus N \subseteq M \cap N$ .

Dies ist trivial, da für jede Menge  $A$  gilt, dass  $\emptyset \subseteq A$ .

## 4 Abbildungen

**Aufgabe 4.1.**

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{wenn } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{wenn } z < 0 \end{cases}$$

**Aufgabe 4.2.** Definitionsbereich, Bildbereich, Bild, Tupel.

	Definitionsbereich	Bildbereich	Bild	Tupel
a	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	
b	$\{0\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$(a)$
c	$\{0\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$(a)$
d	keine Abbildung, da für 1 kein Zielelement existiert			
e	$\{0, 1\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$(a, a)$
f	$\{0, 1\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$(a, b)$
g	keine Abbildung, da für 0 zwei verschiedene Zielelemente existieren			
h	keine Abbildung, da das Zielelement $c$ nicht im Bildbereich ist			
i	keine Abbildung, da die 2 nicht im Definitionsbereich ist			
j	keine Abbildung, da 0 auf -1 abgebildet wird und -1 nicht in $\mathbb{N}$ ist			
k	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \cup \{-1\}$	
l	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	
m	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	

**Aufgabe 4.3.** Bei der Tupelschreibweise geht Information über den Bildbereich verloren.

## 5 Vollständige Induktion

**Aufgabe 5.1.**  $\forall n \geq 3 : n^2 > 2n$ .

- Induktionsanfang ( $n = 3$ ):  $3^2 = 9 > 6 = 2 \cdot 3$ .
- Induktionsschritt:
  - IH:  $k \geq 3, k^2 > 2k$ .
  - Zu zeigen:  $(k + 1)^2 > 2(k + 1)$ .  
 $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \stackrel{\text{IH}}{>} 2k + 2k + 1 = 4k + 1$ . Es gilt  $4k + 1 > 2k + 2$ , da nach Kürzen  $2k > 1$  bzw.  $k > \frac{1}{2}$  bleibt, was durch  $k \geq 3$  (IH) sichergestellt ist. Daher folgt  $(k + 1)^2 > 4k + 1 > 2k + 2 = 2(k + 1)$ .

**Aufgabe 5.2.**  $\forall n \geq 5 : 2^n > n^2$ .

- Induktionsanfang ( $n = 5$ ):  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ .
- Induktionsschritt:
  - IH:  $k \geq 5, 2^k > k^2$ .
  - Zu zeigen:  $2^{k+1} > (k + 1)^2$ .  
 $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \stackrel{\text{IH}}{>} 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \stackrel{\text{A5.1}}{\geq} k^2 + 2k + 1$

**Aufgabe 5.3.**  $\forall n \geq 13 : 4n^2 \geq 3n^2 + 5n + 100$ .

- Induktionsanfang ( $n = 13$ ):  
 $4 \cdot 13^2 = 4 \cdot 169 = 676 \geq 672 = 507 + 65 + 100 = 3 \cdot 13^2 + 5 \cdot 13 + 100$ .
- Induktionsschritt:
  - IH:  $k \geq 13, 4k^2 \geq 3k^2 + 5k + 100$ .
  - Zu zeigen:  $4(k + 1)^2 \geq 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) + 100$ .

$$\begin{aligned} 4(k + 1)^2 &= 4k^2 + 8k + 4 \\ &\stackrel{\text{IH}}{\geq} 3k^2 + 5k + 100 + 8k + 4 = 3k^2 + 13k + 104. \end{aligned}$$

Es gilt  $13k + 104 > 11k + 108$ , da nach Kürzen  $2k > 4$  bzw.  $k > 2$  bleibt, was durch  $k \geq 13$  (IH) sichergestellt ist. Daher folgt

$$\begin{aligned} 4(k + 1)^2 &\geq 3k^2 + 13k + 104 \\ &> 3k^2 + 11k + 108 = 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) + 100. \end{aligned}$$

## 5 Vollständige Induktion

**Aufgabe 5.4.**  $\forall n \geq 0 : n^2 + n$  gerade.

- Induktionsanfang ( $n = 0$ ):  $0^2 + 0 = 0$ .
- Induktionsschritt:
  - IH:  $k \geq 0, k^2 + k$  gerade.
  - Zu zeigen:  $(k + 1)^2 + (k + 1)$  gerade.  
 $(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$ . Nach unserer IH ist  $(k^2 + k)$  gerade, und auch  $2(k + 1)$  ist gerade, weshalb  $(k^2 + k) + 2(k + 1)$  ebenfalls gerade ist.

**Aufgabe 5.5.**  $\forall n \geq 0 : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ .

- Induktionsanfang ( $n = 0$ ):  $\sum_{i=1}^0 \dots = 0 = 0^2$ .
- Induktionsschritt:
  - IH:  $k \geq 0, \sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$ .
  - Zu zeigen:  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = (k + 1)^2$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^k (2i - 1) + 2(k + 1) - 1 \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.6.** Hilberts Hotel.

1. Ja, alle bisherigen Gäste ziehen ein Zimmer weiter.
2. Ja, alle bisherigen Gäste ziehen in das Zimmer mit der Zimmernummer, die das Doppelte ihrer bisherigen Zimmernummer ist.

## 6 Matrizen

**Aufgabe 6.1.** Summen und Produkte.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 28 \\ 21 & 37 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & 22 \\ 29 & 13 & 28 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 21 & 37 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 29 & 13 & 28 \\ 11 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 19 & 24 \end{pmatrix}.$$

Mögliche Summen sind nur  $A + A$ ,  $B + B$  und  $C + C$ .

**Aufgabe 6.2.** Null- und Einheitsmatrix.

$$1. B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } B \text{ eine } m \times n\text{-Matrix ist.}$$

$$2. C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } C \text{ eine } n \times n\text{-Matrix ist.}$$

**Aufgabe 6.3.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Nach dem Aufstellen eines linearen Gleichungssystems erhalten wir die Lösung  $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$