Universität Innsbruck WS 2013/2014

Brückenkurs

Formale Konzepte: Lösungen

3. Auflage

Michael Färber

25. September 2013

Institut für Informatik Innsbruck, Österreich

Inhaltsverzeichnis

1 Definition, Satz, Beweis

Aufgabe 1.1. Vielfache.

1.

a	b	c
0	0	0
0	1	0
1	0	$\perp$
2	2	1
2	4	$\perp$
4	2	2
5	3	$\perp$
5	25	$\perp$

2. $n \in \mathbb{Z} \implies n$ Vielfaches von 9 $\implies n$ Vielfaches von 3
   Definitionen einsetzen: $\exists c :\ n = 9 \cdot c \implies \exists d :\ n = 3 \cdot d$
   Existenzquantor links auflösen: $n = 9 \cdot c = 3 \cdot 3 \cdot c$, somit gilt das Ziel mit $d = 3 \cdot c$

Aufgabe 1.2. Dominanz.

1.

a	b	a Dom b
0	0	$\perp$
0	1	$\perp$
1	0	$\top$
5	3	$\top$
7	8	$\perp$
-2	3	$\perp$
3	-2	$\top$

2. a Dom b gdw $a > b$.

3. Transitivität der Dominanz-Relation: n Dom $m \implies m$ Dom $p \implies n$ Dom p
   Definitionen einsetzen: $\exists c :\ n = m + c \implies \exists d :\ m = p + d \implies \exists e :\ n = p + e$
   Existenzquantoren links auflösen: $n = m + c = p + d + c$, somit gilt das Ziel mit $e = c + d$

Aufgabe 1.3. Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Indirekter Beweis:

Annahme: Es gibt nicht unendlich viele natürliche Zahlen.

Dann existiert eine größte natürliche Zahl m mit $\neg(\exists n \in \mathbb{N} :\ n > m)$. Allerdings gilt $\forall n \in \mathbb{N} :\ n+1 \in \mathbb{N}$, und somit gilt $m+1 \in \mathbb{N}$. Da $m+1 > m$, ergibt sich ein Widerspruch.

Deshalb existieren unendlich viele natürliche Zahlen.

Aufgabe 1.4. $n+1$ ungerade $\Longrightarrow n$ gerade.

Nach Definition 1.2 existiert kein a mit $n+1 = 2 \cdot a$, daher gilt $n+1 = 2 \cdot b + 1$ für ein gewisses b. Durch Umformen erhalten wir $n = 2 \cdot b$, weshalb laut Definition 1.2 n gerade ist.

Aufgabe 1.5. Hilbertsches Barbier-Paradoxon: Die Definition eines Barbiers b entspricht

$$\forall x: \left(\neg R(x,x) \longleftrightarrow R(b,x)\right),$$

wobei $R(x,y)$ ausdrückt, dass x y rasiert. Unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Der Barbier rasiert sich selbst: $R(b,b)$. Dann gilt allerdings $\neg R(b,b)$, was einen Widerspruch darstellt.

2. Der Barbier rasiert sich nicht selbst: $\neg R(b,b)$. Dann gilt allerdings $R(b,b)$, was ebenfalls einen Widerspruch darstellt.

Daher ist nicht entscheidbar, ob ein Barbier sich selbst rasiert oder nicht.

2 Summen und Produkte

Aufgabe 2.1. Zahlenwerte berechnen.

1. $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \cdots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + \cdots + (5 + 6) = 11 \cdot 5 = 55.$
2. $\sum_{i=1}^{5} (i + 1)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90.$
3. $\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdots 5 = 120.$

Aufgabe 2.2. Gleichheiten.
a) bis c) gelten, d) gilt nicht
e) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i).$
f)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (n + 1) + \sum_{i=1}^{n} (-i) \\ &= (n + 1)\, n - \sum_{i=1}^{n} i. \end{aligned}$$

Daher $2 \sum_{i=1}^{n} i = (n + 1)\, n.$

3 Mengen

Aufgabe 3.1. Die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ist $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N}:\ n = 2a + 1\}$.

Aufgabe 3.2. $M = \{1, 2, 4\}$, $N = \{1, 3, 4\}$. $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$.

1. $M \cap N = \{1, 4\}$.
2. $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $M \backslash N = \{2\}$.
4. $N \backslash M = \{3\}$.

Aufgabe 3.3. Inklusions-Beweise.

1. Zu zeigen: $M \subseteq M \cup N$. Also $x \in M \implies x \in M \cup N$.
   $x \in M \implies x \in \{a \mid a \in M\} \implies x \in \{a \mid a \in M \vee a \in N\} \implies x \in M \cup N$.
2. Zu zeigen: $M \cap N \subseteq M$. Also $x \in M \cap N \implies x \in M$.
   $x \in \{a \mid a \in M \wedge a \in N\} \implies x \in \{a \mid a \in M\} \implies x \in M$.
3. Zu zeigen: $M = (M \backslash N) \cup (M \cap N)$.

$$\begin{aligned}
(M \backslash N) \cup (M \cap N) &= \{a \mid a \in \{b \in M \mid b \notin N\} \vee a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in N\}\} \\
&= \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \notin N) \vee (b \in M \wedge b \in N)\}\} \\
&= \{a \mid a \in \{b \in M \mid b \in N \vee b \notin N\}\} \\
&= \{a \mid a \in M\} \\
&= M.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4. $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$.

$$\begin{aligned}
(M \cap P) \cup (N \cap P) &= \{a \mid a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in P\} \vee a \in \{b \mid b \in N \wedge b \in P\}\} \\
&= \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \in P) \vee (b \in N \wedge b \in P)\}\} \\
&= \{a \mid a \in \{b \mid b \in P \wedge (b \in M \vee b \in N)\}\} \\
&= \{a \mid a \in P \wedge a \in M \cup N\} \\
&= P \cap (M \cup N).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5. $(M \cap P) \cup (N \cap P) \subseteq (M \cap N) \cup P$.

$$\begin{aligned}
x \in (M \cap P) \cup (N \cap P) &\Longrightarrow x \in \{a \mid a \in \{b \mid b \in M \wedge b \in P\} \vee a \in \{b \mid b \in N \wedge b \in P\}\} \\
&\Longrightarrow x \in \{a \mid a \in \{b \mid (b \in M \wedge b \in P) \vee (b \in N \wedge b \in P)\}\} \\
&\Longrightarrow x \in \{a \mid a \in \{b \in P\}\} \\
&\Longrightarrow x \in \{a \mid a \in P \vee a \in M \cap N\} \\
&\Longrightarrow x \in P \cup (M \cap N)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6. Nicht-Inklusion.

1. Zu zeigen: $M \backslash N \neq \emptyset \Longrightarrow M \backslash N \not\subseteq M \cap N$.
   Es gilt für alle Mengen A, B: $A \not\subseteq B \Longleftrightarrow \exists x \in A : x \notin B$. Daher müssen wir zeigen, dass $\exists x \in M \backslash N : x \notin M \cap N$.

$$\begin{aligned}
M \backslash N \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \exists x \in M \backslash N \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in \{a \in M \mid a \notin N\} \\
&\Longleftrightarrow \exists x : x \in M \wedge x \notin N \\
&\Longleftrightarrow \exists x : x \in M \wedge x \notin N \wedge x \notin \{a \mid a \in M \wedge a \in N\} \\
&\Longleftrightarrow \exists x : x \in M \wedge x \notin N \wedge x \notin M \cap N \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in \{a \in M \mid a \notin N\} : x \notin M \cap N \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in M \backslash N : x \notin M \cap N.
\end{aligned}$$

2. Zu zeigen: $M \backslash N = \emptyset \Longrightarrow M \backslash N \subseteq M \cap N$.
   Dies ist trivial, da für jede Menge A gilt, dass $\emptyset \subseteq A$.

4 Abbildungen

Aufgabe 4.1.

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{wenn } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{wenn } z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.2. Definitionsbereich, Bildbereich, Bild, Tupel.

	Definitionsbereich	Bildbereich	Bild	Tupel
a	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	
b	$\{0\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	(a)
c	$\{0\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	(a)
d	keine Abbildung, da für 1 kein Zielelement existiert			
e	$\{0, 1\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	(a, a)
f	$\{0, 1\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	(a, b)
g	keine Abbildung, da für 0 zwei verschiedene Zielelemente existieren			
h	keine Abbildung, da das Zielelement c nicht im Bildbereich ist			
i	keine Abbildung, da die 2 nicht im Definitionsbereich ist			
j	keine Abbildung, da 0 auf -1 abgebildet wird und -1 nicht in $\mathbb{N}$ ist			
k	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \cup \{-1\}$	
l	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	
m	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	

Aufgabe 4.3. Bei der Tupelschreibweise geht Information über den Bildbereich verloren.