

Brückenkurs

Formale Konzepte

7. Auflage

Harald Zankl

Michael Färber

Gerald Fux

22. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik	2
1.1	Junktoren	2
1.2	Aufgaben	4
2	Definition, Satz, Beweis	5
2.1	Aufgaben	7
3	Summen und Produkte	9
3.1	Aufgaben	9
4	Mengen	11
4.1	Beweise mit Mengen	12
4.2	Aufgaben	12
5	Abbildungen	14
5.1	Aufgaben	15
6	Prädikatenlogik	17
6.1	Aufgaben	18
7	Vollständige Induktion	19
7.1	Aufgaben	20
8	Matrizen	21
8.1	Aufgaben	22

1 Aussagenlogik

Eine *logische* Aussage ist eine Aussage die (eindeutig) entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Zum Beispiel: Für den Fall, dass wir von der üblichen Definition von „Innenwinkel“ und „beliebiges Dreieck“ ausgehen gilt:

- *Die Summe aller Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist 180°*
... ist eine wahre logische Aussage.
- *Die Summe aller Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist 170°*
... ist eine falsche logische Aussage.
- *Dieser Satz ist falsch.*
... ist keine logische Aussage.

1.1 Junktoren

Anhand sogenannter Junktoren können aus einer oder mehreren logische Aussagen (A, B) neue logische Aussagen konstruiert werden.

Negation ($\neg A$)

Die Negation macht aus einer wahren Aussage eine falsche und aus einer falschen eine wahre. Man schreibt $\neg A$ und spricht „nicht A “. Wir schreiben diesen Zusammenhang in einer sogenannten Wahrheitstabelle an.

A	\parallel	$\neg A$
w	\parallel	f
f	\parallel	w

In der sogenannten klassischen Logik einigen wir uns darauf, dass eine doppelte Negation von A gleichbedeutend ist mit A selbst. Also $\neg(\neg A)$ das gleiche bedeutet wie A . Im Alltag ist das nicht immer der Fall. Wenn man beispielsweise zu seinem Partner sagt: „Es ist so, dass ich dich liebe.“ kann man eine andere Reaktion erwarten, als wenn man sagt: „Es *nicht* ist so, dass ich dich *nicht* liebe.“ In der klassischen Logik (und auch in diesem Kurs) gehen wir allerdings davon aus, dass die beiden Aussagen exakt gleichbedeutend sind.

Konjunktion ($A \wedge B$) und Disjunktion ($A \vee B$)

Die Konjunktion entspricht dem gewöhnlichen „und“. Das heißt, $(A \wedge B)$ ist nur dann wahr, wenn sowohl A wahr ist als auch B wahr ist. Man schreibt $A \wedge B$ und spricht „ A und B “.

Die Disjunktion entspricht dem inklusiven „oder“. Das heißt, $(A \vee B)$ ist nur dann falsch, wenn sowohl A falsch ist als auch B falsch ist. Man schreibt $A \vee B$ und spricht „ A oder B “.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Implikation ($A \Rightarrow B$)

Die Implikation $A \Rightarrow B$ entspricht dem gewöhnlichen „Wenn A , dann B “. Man spricht auch „Aus A folgt B “.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Vereinbarung, dass die Implikationen $f \Rightarrow w$, als auch $f \Rightarrow f$ wahr sind trägt den Namen *ex falso (sequitur) quodlibet* (lateinisch für „Aus Falschem folgt Beliebiges“). Dieses Prinzip erlaubt *indirekte* Beweisführung (siehe Kapitel 2) dadurch, dass $A \Rightarrow B$ gleichbedeutend ist mit $\neg B \Rightarrow \neg A$ ¹. „Wenn X eine Katze ist, dann ist X ein Säugetier“ ist gleichbedeutend mit „Wenn X *kein* Säugetier ist, dann ist X *keine* Katze“. Außerdem, wenn X *keine* Katze ist, kann (ex falso sequitur quodlibet) X ein Säugetier sein oder auch nicht.

Ein Beispiel dafür, dass aus etwas Falschem etwas Falsches folgen kann, ist: Wenn $3 = 2$, dann (beide Seiten mit 4 multipliziert) folgt $12 = 8$. Obwohl weder $3 = 2$ noch $12 = 8$ wahr ist, ist die Schlussfolgerung richtig.

Also ist die Aussage $(3 = 2) \Rightarrow (12 = 8)$ wahr.

Ein Beispiel dafür, dass aus etwas Falschem etwas Wahres folgen kann, ist: Wenn $3 = 2$, dann (zu beiden Seiten 2 addiert) folgt $3 + 2 = 2 + 2$. Da $3 = 2$ ist, kann man 3 durch 2 ersetzen und weiter schließen, dass $2 + 2 = 2 + 2$. Also ist die Aussage $(3 = 2) \Rightarrow (2 + 2 = 2 + 2)$ wahr.

¹Für Interessierte: Die Implikation spielt eine entscheidende Rolle zur Beurteilung von Beweisen (und somit der gesamten Mathematik). Diese Definition ist die in der Mathematik übliche (Klassische Logik). Es gibt allerdings auch andere Ansätze, wie beispielsweise der sogenannte Intuitionismus, der keine indirekten Beweise erlaubt.

Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist wahr, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gilt, sonst ist sie falsch. Man spricht „A genau dann, wenn B“.

A	B	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

1.2 Aufgaben

Aufgabe 1.1. Welche der folgenden Aussagen ist für beliebige logische Aussagen A , B und C wahr?²

- a) $A \vee (\neg A)$
- b) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
- d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$
- f) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge (\neg B))$
- g) $((A \wedge (\neg A) \vee B) \Rightarrow C)$

²Beurteilen Sie die Aussagen nach der in diesem Skript präsentierten klassischen Logik!

2 Definition, Satz, Beweis

Eine Definition führt eine neue Eigenschaft basierend auf bekannten Konzepten ein, z.B.

Definition 2.1. Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Die Menge der ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Wenn man dann weiß, was ganze Zahlen sind, kann man diese weiter unterscheiden.

Definition 2.2. Eine ganze Zahl n heißt *gerade*, wenn sie durch zwei (ohne Rest) teilbar ist. Ansonsten heißt sie *ungerade*.

Beispiele werden oftmals verwendet um Definitionen zu veranschaulichen.

Beispiel 2.1. Somit sind z.B. $-2, 0, 2, 4, 6, 42$ gerade Zahlen. Ungerade Zahlen sind etwa $-11, 1, 3, 5, 21$. Hingegen sind a, b, π im Allgemeinen keine natürlichen bzw. ganzen Zahlen.

Ein Satz (oftmals auch Lemma oder Theorem genannt) trifft Aussagen über bestimmte Zusammenhänge. Dabei treffen Sätze oft bestimmte Voraussetzungen (*Prämissen*). Nur, wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, muss auch die Folgerung des Satzes (*Konklusion*) erfüllt sein. Im nachfolgenden Satz ist die Prämisse, dass n eine ganze und gerade Zahl ist. Falls die Prämissen erfüllt sind, so gibt es eine ganze Zahl a , welche die Hälfte von n ist. Über eine ungerade Zahl n macht nachfolgender Satz keine Aussage.

Satz 2.1. Sei n eine ganze Zahl. Wenn n gerade ist, dann gibt es eine ganze Zahl a , sodass $n = 2a$.

Um sich selbst (und Kollegen) von der Gültigkeit solcher Sätze zu überzeugen, muss man sie beweisen. Meist muss man dazu die Definitionen von bestimmten Eigenschaften ausnutzen. Obiger Satz trifft eine Aussage über unendlich viele gerade Zahlen (über ungerade Zahlen wird nichts ausgesagt). Um solch eine Aussage zu beweisen, reicht es nicht aus, den Satz für bestimmte Werte (z.B. $-2, 0, 2, 4$) zu überprüfen, sondern wir müssen für *alle* geraden Zahlen argumentieren.

Beweis von Satz 2.1: Sei also nun n eine beliebige gerade Zahl. Aus Definition 2.2 wissen wir, dass n ohne Rest durch 2 teilbar ist, d.h. es gibt eine ganze Zahl q , sodass $n \div 2 = q$. Mit anderen Worten ist q der Quotient von n durch 2. Somit gilt aber aufgrund von Äquivalenzumformung auch, dass $n = 2q$. Wir wählen in Satz 2.1 also $a = q$ und haben die Behauptung bewiesen. \square

Um das Ende eines Beweises zu markieren, verwendet man oftmals am rechten Rand des Blattes das Zeichen \square .

In Satz 2.1 haben wir eine bestimmte Struktur einer Aussage gesehen. *Wenn* bestimmte Vorbedingungen (Prämissen) erfüllt sind, *dann* folgt daraus eine gewisse Konsequenz (Konklusion). Man kann Satz 2.1 auch so formulieren:

Sei n eine ganze Zahl.

$$(n \text{ ist gerade}) \Rightarrow (\text{Es gibt ein } a \in \mathbb{Z}, \text{ sodass } n = 2a)$$

Diese *Wenn-dann* Sätze werden uns noch öfter begegnen.

Wenn wir die Aussage von Satz 2.1 genauer anschauen, stellen wir fest, dass die *Rückrichtung* ebenfalls gilt, also:

Satz 2.2. Sei n eine ganze Zahl. Wenn es eine ganze Zahl a gibt sodass $n = 2a$, dann ist n gerade.

Beweis. Wir können annehmen, dass $n = 2a$. Also ist n durch 2 ohne Rest teilbar und somit ist (laut Definition 2.2) n gerade. \square

Wenn ein *Wenn-dann-Satz* sowie seine *Rückrichtung* gilt, dann spricht man auch von *Genau-dann-Wenn-Sätzen*. Satz 2.1 hat die Form $A \Rightarrow B$ und Satz 2.2 hat die Form $B \Rightarrow A$. Nach der Definition der Äquivalenz gilt also $A \Leftrightarrow B$. Somit können wir aus diesen Sätzen eine *Folgerung* (oftmals auch Korollar genannt) ableiten:

Folgerung 2.1. Sei n eine ganze Zahl. Dann ist n gerade, genau dann wenn es eine ganze Zahl a gibt, sodass $n = 2a$.

Die beiden von uns geführten Beweise haben die Form eines *direkten Beweises*. Direkte Beweise einer Aussage der Form *Wenn A, dann B* nehmen die Gültigkeit von A an, um daraus die Gültigkeit von B zu folgern. Oftmals ist es hingegen einfacher einen Beweis indirekt zu führen. Will man eine Aussage der Form *Wenn A, dann B* indirekt beweisen, nimmt man an, dass A gilt, aber B falsch ist. Kann man dann einen Widerspruch (Kontradiktion) herleiten, dann muss die Annahme (dass B falsch ist) falsch sein (und somit B wahr sein). Wir demonstrieren die Idee des indirekten Beweises nachfolgend.

Satz 2.3. Sei n eine ganze Zahl. Wenn n gerade ist, dann ist $n + 1$ ungerade.

Beweis. Gemäß eines indirekten Beweises nehmen wir an, dass n gerade ist und dass

Annahme: $n + 1$ nicht ungerade

ist. (Also muss $n + 1$ laut unserer Annahme gerade sein.) Weil n gerade ist, gibt es laut Satz 2.1 eine ganze Zahl a mit $n = 2a$. Weil $n + 1$ gerade ist (Annahme!), gibt es laut Satz 2.1 eine ganze Zahl b mit $n + 1 = 2b$. Einsetzen liefert $2a + 1 = 2b$ und Umformen/Herausheben ergibt $1 = 2(b - a)$. Somit ist 1 gerade (Satz 2.2), was den gewünschten Widerspruch liefert. \square

Man kann einen indirekten Beweis dieser Art auch formal wie folgt verstehen: Wir wollen zeigen, dass $A \Rightarrow B$. Wir zeigen dazu zuerst, dass aus $A \wedge (\neg B)$ etwas Falsches folgt. Wegen *ex falso (sequitur) quodlibet* (also, dass aus Falschem beliebiges folgt) muss $A \wedge (\neg B)$ falsch sein. Die Negation $\neg(A \wedge (\neg B))$ ist also wahr. In den Aufgaben aus Kapitel 1 haben wir gezeigt, dass $\neg(A \wedge (\neg B))$ genau dann wahr ist, wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist.

2.1 Aufgaben

Aufgabe 2.1. Eine Zahl a heißt *Vielfaches* von einer Zahl b , wenn es eine ganze Zahl c gibt, sodass $a = bc$.

- a) Welche Zahl ist ein Vielfaches von der anderen?

a	b	Ist a ein Vielfaches von b ? Bestimmen Sie jeweils den Wert für c .
0	0	
0	1	
1	0	
2	2	
2	4	
4	2	
5	3	
5	25	

- b) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Sei n eine ganze Zahl. Wenn n ein Vielfaches von 9 ist, dann ist n ein Vielfaches von 3.

Aufgabe 2.2. Eine Zahl a *dominiert* eine Zahl b , wenn es eine natürliche Zahl c ungleich Null gibt, sodass $a = b + c$.

- a) Für welche der folgenden Werte dominiert die Zahl a die Zahl b ?

a	b	Dominiert die Zahl a die Zahl b ?
0	0	
0	1	
1	0	
5	3	
7	8	
-2	3	
3	-2	

- b) Kennen Sie einen anderen Namen für das *Dominieren*?

- c) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Aus n dominiert m und m dominiert p folgt n dominiert p .

Hinweis: Formulieren Sie den Satz zuerst als Wenn-dann Satz.

Aufgabe 2.3. Beweisen Sie (mittels indirektem Beweis) den folgenden Satz:

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.

Aufgabe 2.4. Beweisen Sie die *Rückrichtung* von Satz 2.3.

Wenn $n + 1$ ungerade ist, dann ist n gerade.

Aufgabe 2.5. (*Russels Barbier*)

Das Barbier-Paradoxon zeigt, dass man beim Einführen von Definitionen achtsam sein muss.

Definition 2.3. Ein Barbier ist jemand, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Die Frage ist nun, ob sich ein Barbier selbst rasiert oder nicht.

3 Summen und Produkte

Endliche Summen

$$x_1 + \dots + x_n$$

werden oft kurz als

$$\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$$

geschrieben. Gleiches gilt für Produkte, d.h.

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

wird als

$$\prod_{i=1}^n x_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{1 \leq i \leq n} x_i$$

geschrieben.

Definition 3.1. Für eine natürliche Zahl n heißt das Produkt

$$\prod_{i=1}^n i$$

die *Fakultät* von n , welche üblicherweise auch als

$$n!$$

geschrieben wird.

Beispiel 3.1. Es gilt $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$.

3.1 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Berechnen Sie Zahlenwerte für:

a)

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

b)

$$\sum_{i=1}^5 (i+1)^2$$

c)

$$\prod_{i=1}^5 i$$

d)

$$6!$$

Aufgabe 3.2. Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ ganze Zahlen. Welche der folgenden Gleichheiten gelten, welche nicht?

a)

$$c \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n (cx_i)$$

b)

$$\sum_{i=1}^n ((a_i + b_i)c_i) = \left(\sum_{i=1}^n (a_i c_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^n (b_i c_i) \right)$$

c)

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c_i) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)$$

d)

$$\sum_{i=1}^n ((a_i b_i) + c_i) = \left(\sum_{i=1}^n (a_i + c_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \right)$$

e)

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)$$

f)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

4 Mengen

In Kapitel 2 haben wir bereits mit den Mengen der natürlichen bzw. ganzen Zahlen gearbeitet. In diesem Kapitel werden wir uns genauer mit Mengen beschäftigen. Eine Menge bezeichnet eine *Ansammlung* von *verschiedenen* und *unterscheidbaren* Elementen. Endliche Mengen können somit als Aufzählung ihrer Elemente angegeben werden. Dazu verwenden wir (wie bereits in Kapitel 2) geschweifte Klammern.

$$M = \{1, 5, 12, a, b\}$$

Die Menge M besteht also aus den Zahlen 1, 5, 12 und den Buchstaben a und b . Die *leere Menge* $\{\}$ wird oft auch als \emptyset geschrieben. Für unendliche Mengen verwenden wir oft die Ellipse (\dots), wenn klar ist, wie die fehlenden Elemente aussehen. Auch das haben wir bereits verwendet:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

Insbesondere spielt die Reihenfolge und die Häufigkeit der Elemente keine Rolle. Wir schreiben $a \in M$, wenn a ein Element der Menge M ist und $a \notin M$, wenn a kein Element der Menge M ist.

Beispiel 4.1. Es ist $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Weiters ist $1 \in \{1, 2\}$ und $3 \notin \{1, 2\}$.

Mengen können auch durch *Bedingungen* angegeben werden.

Beispiel 4.2. Die Menge der geraden Zahlen kann als

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } a \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2a\}$$

geschrieben werden. Dabei wird das Zeichen “ \mid ” als *für-die-gilt* gelesen.

Definition 4.1. Seien M und N Mengen, dann heißt

- $M \cap N = \{a \mid a \in M \text{ und } a \in N\}$ der *Schnitt*,
- $M \cup N = \{a \mid a \in M \text{ oder}^1 a \in N\}$ die *Vereinigung*,
- $M \setminus N = \{a \in M \mid a \notin N\}$ die *(Mengen-)Differenz*

von M und N .

¹Hier bezeichnet oder das *einschließende oder*–im Gegensatz zum ausschließenden *entweder-oder*.

Beispiel 4.3. Seien $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{3, 4, 5, 6\}$. Dann ist $M \cap N = \{3\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M \setminus N = \{1, 2\}$ und $N \setminus M = \{4, 5, 6\}$.

Definition 4.2. Eine Menge M heißt *Teilmenge* einer Menge N (geschrieben $M \subseteq N$), wenn aus $a \in M$ auch $a \in N$ folgt.

Beispiel 4.4. Es gilt $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M . Weiters ist z.B. $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, aber $\{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ gilt nicht. Wir schreiben dann auch $\{1, 3, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

4.1 Beweise mit Mengen

Seien M und N Mengen. Um die Teilmengeneigenschaft (Inklusion)

$$M \subseteq N$$

zu zeigen, genügt es nach der Definition, die folgende *Wenn-dann* Aussage zu beweisen:

$$\text{Wenn } m \in M, \text{ dann } m \in N.$$

Die *Gleichheit von Mengen* M und N kann bewiesen werden, indem man *zwei* Behauptungen zeigt:

- Wenn $m \in M$, dann $m \in N$.
- Wenn $n \in N$, dann $n \in M$.

4.2 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Schreiben Sie die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen mit der Notation von Beispiel 4.2.

Aufgabe 4.2. Seien $M = \{1, 2, 4\}$ und $N = \{1, 3, 4\}$ Mengen. Berechnen Sie

- $M \cap N$
- $M \cup N$
- $M \setminus N$
- $N \setminus M$

Gilt $M \subseteq N$ bzw. $N \subseteq M$?

Aufgabe 4.3. Seien M und N Mengen. Beweisen Sie

- $M \subseteq M \cup N$
- $M \cap N \subseteq M$

c) $M = (M \setminus N) \cup (M \cap N)$

Aufgabe 4.4. Seien M , N und P Mengen. Beweisen Sie

$$(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$$

Aufgabe 4.5. Seien M , N und P Mengen. Beweisen Sie

$$(M \cap P) \cup (N \cap P) \subseteq (M \cap N) \cup P$$

Warum gilt $(M \cap N) \cup P \subseteq (M \cap P) \cup (N \cap P)$ nicht?

Aufgabe 4.6. Seien M und N Mengen. Beweisen Sie:

a) Wenn $M \setminus N \neq \emptyset$, dann $M \setminus N \not\subseteq M \cap N$.

b) Wenn $M \setminus N = \emptyset$, dann $M \setminus N \subseteq M \cap N$.

5 Abbildungen

Definition 5.1. Seien M und N Mengen. Eine *Abbildung*¹ von M nach N ist eine Vorschrift, die genau jedem $m \in M$ genau ein $n \in N$ zuordnet. Wir schreiben

$$f: M \rightarrow N, m \mapsto f(m),$$

wenn f eine Abbildung von M nach N ist, und nennen M den *Definitionsbereich* und N den *Bildbereich*.

Beispiel 5.1. Sei P die Menge aller Produkte einer Firma. Dann ist $f: P \rightarrow \mathbb{N}$, wobei $p \mapsto f(p)$ eine Abbildung, die in der Praxis *Preis* genannt wird.

Beispiel 5.2. Sei M die Menge aller Mitarbeiter einer Firma. Dann ist die Zuordnung

$$f: M \rightarrow M, m \mapsto \text{Vorgesetzter von } m$$

im Allgemeinen keine Abbildung (der Chef hat keinen Vorgesetzten).

Definition 5.2. Sei

$$f: M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

eine Abbildung. Dann heißt $f(m)$ das *Bild* von m und m ist ein *Urbild* von $f(m)$. Die Menge $\{f(m) \mid m \in M\} \subseteq N$ heißt das *Bild* von f .

Wenn $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung ist, dann hat jedes $m \in M$ genau ein Bild, für ein $n \in N$ kann es aber beliebig viele (auch kein) Urbild geben.

Beispiel 5.3. Sei

$$f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}, 0 \mapsto b, 1 \mapsto b, 2 \mapsto a$$

eine Abbildung. Der Definitionsbereich von f ist $\{0, 1, 2\}$, der Bildbereich ist $\{a, b, c\}$, das Bild ist $\{a, b\}$. Das Bild von 2 ist a . Das Element b hat die Urbilder 0 und 1. Das Element c hat kein Urbild.

Beispiel 5.4. Sei

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine Abbildung. Das Bild von 0 ist 0, das Bild von 1 ist -1 , das Bild von 2 ist 1.

¹Wir verwenden die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym.

Konvention 5.1. Eine Abbildung $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow A$, $i \mapsto f(i)$ wird oft auch als $(f(1), f(2), \dots, f(k))$ geschrieben und heißt dann ein k -Tupel. Für $k = 2$ bzw. $k = 3$ nennt man ein k -Tupel auch Paar bzw. Tripel.

Beispiel 5.5. Das Paar (a, b) entspricht der Abbildung $\{1, 2\} \rightarrow \{a, b\}$, $1 \mapsto a, 2 \mapsto b$. Das Paar (b, b) entspricht der Abbildung $\{1, 2\} \rightarrow \{a, b\}$, $1 \mapsto b, 2 \mapsto b$.

Bemerkung 5.1. Im Gegensatz zu Mengen kommt es bei Tupeln auf die Reihenfolge an. Es gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$, aber $(a, b) \neq (b, a)$. Weiters ist $\{a, a\} = \{a\}$, aber $(a, a) \neq (a)$.

Definition 5.3. (*Kartesisches Produkt*)

Seien A und B Mengen. Dann heißt $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ das *kartesische Produkt* von A und B .

Beispiel 5.6. Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$ ist

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$

aber

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

5.1 Aufgaben

Aufgabe 5.1. Die Abbildung f in Beispiel 5.4 hat eine besondere Eigenschaft. Jedes Element im Bild von f hat genau ein Urbild. Somit kann man die Abbildungsvorschrift von f auch umkehren. Ergänzen Sie die Abbildung g , sodass Sie die *Umkehrung* von f berechnet.

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} \boxed{} & \text{wenn } z \boxed{} \\ \boxed{} & \text{wenn } z \boxed{} \end{cases}$$

Aufgabe 5.2. Welche der folgenden Vorschriften sind Abbildungen, welche nicht? Bestimmen Sie für alle Abbildungen (i) Definitionsbereich, (ii) Bildbereich und (iii) Bild.

a)

$$f: \emptyset \rightarrow \{a\}$$

b)

$$f: \{0\} \rightarrow \{a\}, 0 \mapsto a$$

c)

$$f: \{0\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a$$

d)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a$$

e)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a, 1 \mapsto a$$

f)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a, 1 \mapsto b$$

g)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a, 0 \mapsto b$$

h)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}, 0 \mapsto a, 1 \mapsto c$$

i)

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{a, b, c\}, 0 \mapsto a, 1 \mapsto b, 2 \mapsto c$$

j)

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$$

k)

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1$$

l)

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$$

m)

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$$

Aufgabe 5.3. Betrachten Sie die Abbildungen aus Aufgabe 5.2.

- Welche Abbildungen kann man als Tupel schreiben? Geben Sie die zugehörigen Tupel jeweils an.
- Gehen Informationen in der Tupelschreibweise verloren? Wenn ja, welche?

6 Prädikatenlogik

Prädikat

Ein Prädikat ist eine logische Aussage die von einer oder mehreren Variablen abhängt. Zum Beispiel:

- $P(X) :\Leftrightarrow X$ ist eine Katze.
- $Q(X, Y) :\Leftrightarrow X$ mag Y .

Allquantor (\forall)

Der Allquantor „ $\forall X : P(X)$ “ ist als Abkürzung für folgende Aussage zu verstehen: „Für alle X gilt, dass $P(X)$ wahr ist“. Zum Beispiel: „Alle meine Haustiere sind Katzen.“ oder „Ich halte nur Katzen als Haustiere.“ kann geschrieben werden als:

$$\forall X \in \{\text{meine Haustiere}\} : X \text{ ist eine Katze}$$

Existenzquantor (\exists)

Der Existenzquantor „ $\exists X : P(X)$ “ ist als Abkürzung für folgende Aussage zu verstehen: „Es existiert (mindestens) ein X , sodass $P(X)$ gilt“ zu verstehen. Zum Beispiel: „Mindestens einer meiner Freunde ist größer als ich.“ kann geschrieben werden als:

$$\exists X \in \{\text{meine Freunde}\} : X \text{ ist größer als ich}$$

Allgemein gilt:

$$(\exists X : P(X)) \Leftrightarrow \neg (\forall X : \neg P(X)).$$

Zum Beispiel: „Es gibt jemanden der jonglieren kann.“ ist gleichbedeutend mit „Es ist falsch, dass für alle gilt, dass sie nicht jonglieren können“.

Die Reihenfolge zählt!

Achtung! Bildet man Aussagen mit mehreren Quantoren, ist (im Allgemeinen) die Reihenfolge von Bedeutung. Zum Beispiel:

„Für alle Männer m gibt es eine Frau w , sodass gilt: m findet w hübsch.“

$$\forall m \in \sigma \exists w \in \wp : m \text{ findet } w \text{ hübsch}$$

... ist *nicht* die gleiche Aussage wie ...

„Es gibt eine Frau w , sodass für alle Männer m gilt: m findet w hübsch.“

$$\exists w \in \wp \forall m \in \sigma : m \text{ findet } w \text{ hübsch}$$

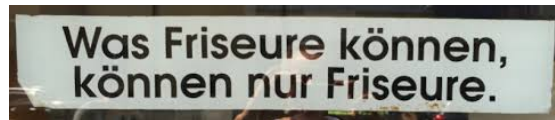
6.1 Aufgaben

Aufgabe 6.1. Definition: Sei G eine Menge und $f : G \times G \rightarrow G$ eine Abbildung. Wir nennen das Paar (G, f) eine *Gruppe* falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- i) $\forall x, y, z \in G : [f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)]$
- ii) $\exists e \in G : \forall x \in G : [f(x, e) = x = f(e, x)]$
- iii) $\forall x \in G : \exists y \in G : [f(x, y) = e = f(y, x)]$, wobei e ein e aus Punkt ii ist.

Sei $Z := \{0, 1\}$ und $\mu : Z \times Z \rightarrow Z$ mit $(0, 0) \mapsto 0, (0, 1) \mapsto 1, (1, 0) \mapsto 1$ und $(1, 1) \mapsto 0$. Ist das Paar (Z, μ) eine Gruppe?

Aufgabe 6.2. Am Eingang einiger Friseursalons steht geschrieben:



Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme folgt, dass: Wenn Julia singen kann und Julia kein Friseur ist folgt daraus, dass alle Friseure nicht singen können! Hilfestellung: Wir formulieren „ x ist ein Friseur“ als $x \in F$ bzw. „ x ist kein Friseur“ als $x \notin F : \Leftrightarrow \neg(x \in F)$. Außerdem definieren wir das Prädikat K so, dass $K(x, t) : \Leftrightarrow (x \text{ kann Tätigkeit } t)$. Wir können dann die Annahme aus dem Bild so formulieren: Für alle Tätigkeiten t gilt

$$[\exists x \in F : K(x, t)] \Rightarrow [\forall y : (K(y, t) \Rightarrow y \in F)].$$

Bemerkung: Tatsächlich wollen die Salonbetreiber vermutlich ausdrücken: „Was alle Friseure können (nämlich Haare schneiden), können nur Friseure.“ Es ist nicht klar wie der Satz: „Was Friseure können, können nur Friseure.“ interpretiert werden soll. Da verschiedene Interpretationen aber zu dramatisch verschieden Implikationen führen, wollen wir solche Uneindeutigkeiten in der Informatik durch eine formale Formulierung der Zusammenhänge vermeiden.

7 Vollständige Induktion

Sei m eine fest gewählte natürliche Zahl, z.B. $m = 0$ oder $m = 1$. Eine Aussage $A(n)$ soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ gezeigt werden. In diesem Fall gehen wir wie folgt vor:

- INDUKTIONSBASIS: Wir zeigen $A(m)$, d.h., dass A für den Basiswert m gilt.
- INDUKTIONSSCHRITT: Sei nun $k \geq m$. Wir zeigen: Wenn $A(k)$, dann $A(k+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq m$.

Die Annahme im Induktionsschritt, dass $A(k)$ gilt, wird auch *Induktionsannahme* oder *Induktionshypothese* genannt.

Wir wenden das Prinzip der Induktion an, um folgenden Satz zu beweisen.

Satz 7.1. Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt:

$$n^2 \geq 2n$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Im Basisfall ist $m = 2$ und somit $m^2 = 4 \geq 4 = 2m$. Im Induktionsschritt ist $k \geq 2$. Die Induktionshypothese lautet $k^2 \geq 2k$. Zu zeigen ist $(k+1)^2 \geq 2(k+1)$, was leicht nachgeprüft werden kann:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq 2k + 2k + 1 = 2k + 4 + 1 \geq 2k + 2 = 2(k+1)$$

Dabei verwenden wir die Induktionshypothese im zweiten Schritt und $k \geq 2$ im dritten Schritt. \square

Satz 7.2. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Im Basisfall ist $m = 0$ und $\sum_{i=0}^m i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$. Im Induktionsschritt ist $k \geq 0$. Die Induktionshypothese lautet $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$. Wir zeigen $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \left(\sum_{i=0}^k i \right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Wir verwenden die Induktionshypothese im zweiten Schritt. \square

Im Informatikstudium werden Sie noch andere Arten der Induktion kennen lernen. Einige davon sind nicht über den natürlichen Zahlen, sondern über Datenstrukturen. Es kann auch mehrere Basisfälle geben.

7.1 Aufgaben

Aufgabe 7.1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$:

$$n^2 > 2n$$

Aufgabe 7.2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$:

$$2^n > n^2$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 7.1.

Aufgabe 7.3. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 13$:

$$4n^2 \geq 3n^2 + 5n + 100$$

Aufgabe 7.4. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$:

$$n^2 + n \text{ ist eine gerade Zahl.}$$

Aufgabe 7.5. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Aufgabe 7.6. (*Hilberts Hotel*)

In der Unendlichkeit können oft Phänomene auftreten, die der Intuition widersprechen. Deshalb sind induktive Beweise wichtig, weil wir damit Aussagen über unendlich viele Zahlen beweisen können. Das nachfolgende Beispiel soll die Problematik veranschaulichen:

Ein Hotel hat unendlich viele Zimmer. Jedes Zimmer ist belegt.

- a) Ein weiterer Gast kommt ins Hotel und bittet um Unterkunft. Kann seinem Wunsch entsprochen werden?
- b) Ein Bus mit unendlich vielen Gästen kommt an. Können die Gäste im Hotel untergebracht werden?

8 Matrizen

Definition 8.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ -Matrix A über R ist eine Abbildung $A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow R$, $(i, j) \mapsto A(i, j)$. Wir schreiben $A(i, j)$ oft als A_{ij} .

Im Folgenden betrachten wir Matrizen über ganzen Zahlen, das heißt $R = \mathbb{Z}$. In der Mathematik/Informatik werden Matrizen oft über allgemeinere Strukturen gebildet.

Konvention 8.1. (*Matrizenschreibweise*)

Wir schreiben Matrizen meist als zweidimensionale Felder.

Die 2×3 -Matrix $A: \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(1, 1) \mapsto 1$, $(1, 2) \mapsto 2$, $(1, 3) \mapsto 3$, $(2, 1) \mapsto 4$, $(2, 2) \mapsto 5$, $(2, 3) \mapsto 6$ entspricht dann

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Für eine $m \times n$ -Matrix nennen wir $m \times n$ die Dimension, m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten der Matrix.

Definition 8.2. (*Matrizenaddition*)

Seien A und B zwei $m \times n$ -Matrizen. Die *Summe* von A und B ist definiert wie folgt: $S := A + B$, wobei $S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Die Addition von zwei Matrizen erfolgt *komponentenweise*.

Beispiel 8.1. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition 8.3. (*Matrizenmultiplikation*)

Sei A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $n \times p$ -Matrix. Das Produkt P von A und B ist eine $m \times p$ -Matrix und definiert wie folgt: $P := A \cdot B$, wobei $P_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ik} B_{kj}$.

Beispiel 8.2. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 15 \\ 68 & 39 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 10 & 17 & 24 \\ 17 & 25 & 33 \end{pmatrix}$$

ist die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ.

8.1 Aufgaben

Aufgabe 8.1. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle (möglichen) Summen und Produkte von je zwei Matrizen.

Aufgabe 8.2. Sei A eine $m \times n$ -Matrix.

- a) Finden Sie eine Matrix B , sodass $A + B = A$.
- b) Finden Sie eine Matrix C , sodass $A \cdot C = A$.

Hinweis: Welche Dimensionen müssen die gesuchten Matrizen haben?

Aufgabe 8.3. Finden Sie eine Matrix B , sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Matrix B hat auch nicht-ganzzahlige Einträge.