Algorithmen und Datenstrukturen

Analyse von Algorithmen

Prof. Justus Piater, Ph.D.

16. März 2022

Dieser Kurs folgt in weiten Teilen dem sehr empfehlenswerten Lehrbuch *Data Structures and Algorithms in Java* [Goodrich u. a. 2014].

Inhaltsverzeichnis

1 Empirische Laufzeitanalyse **2**

2 Zählen primitiver Operationen **7**

3 Groß-O Notation **11**

4 Tilde-Approximation **25**

5 Beweistechniken **27**

6 Zusammenfassung **30**

Ressourcenbedarf [Slide 1]

Welche Ressourcen nimmt mein Programm in Anspruch:

- Zeit (CPU, etc.)
- Raum (RAM, etc.)
- andere (offene Datei-Deskriptoren, ...)

Wie finden wir dies heraus?

Mein „Programm“:

- Algorithmus
- seine Implementation

> Viele Datenverarbeitungsprobleme, wie zum Beispiel das Sortieren einer Zahlensequenz, lassen sich auf unterschiedliche Weise, d.h. mit unterschiedlichen Algorithmen lösen. Manche dieser Algorithmen sind effizienter als andere. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man die Effizienz von Algorithmen charakterisieren kann.

Bei der Effizienz geht es natürlich um die Laufzeit eines Programms, aber nicht nur. Auch andere Ressourcen sind von Interesse, beispielsweise der Speicherbedarf oder andere Ressourcen, die vom Betriebssystem zur Verfügung gestellt werden.

Wenn wir hier informell von einem Programm sprechen, dann interessieren wir uns für den Algorithmus, d.h., die Schritt-für-Schritt-Beschreibung der Methode, der das Programm folgt. Details der Implementierung können ebenfalls einen Einfluss auf den Ressourcenbedarf haben, beispielsweise die Wahl der Programmiersprache oder ob auf Arrays über Pointer oder über Indizes zugegriffen wird. Dieser Einfluss fällt jedoch im Vergleich zur Wahl des Algorithmus kaum ins Gewicht, wie wir noch sehen werden.

Unter den verschiedenen Ressourcen ist die Laufzeit die wichtigste. Insbesondere bildet der Zeitbedarf eine obere Schranke für den Platzbedarf. Warum das so ist, darüber dürfen Sie selber nachdenken. Daher werden wir uns hier auf die Analyse des sogenannten Laufzeitverhaltens beschränken.

Wie können wir das Laufzeitverhalten eines Algorithmus analysieren? Hier bieten sich zwei Methoden an: Wir können den Algorithmus implementieren und seine Laufzeit experimentell, also empirisch ermitteln. Oder wir können den Algorithmus theoretisch analysieren. Im Folgenden werden wir uns beide Methoden anschauen.

1 Empirische Laufzeitanalyse

Zeitmessung [Slide 2]

```
long startTime = System.currentTimeMillis(); // record the starting time
/* run the algorithm */
long endTime = System.currentTimeMillis(); // record the ending time
long elapsed = endTime - startTime;      // compute the elapsed time
```

Unter empirischer Laufzeitanalyse versteht man das Messen der Laufzeit des Programs als Funktion der Problemgröße. Dafür werden die Start- und Endzeit vor und nach dem zu messenden Code gespeichert, und die Differenz ergibt die empirische Laufzeit.

Iterative Erweiterung von Zeichenketten [Slide 3]

```java
/** Uses repeated concatenation to compose a String
    with n copies of character c. */
public static String repeat1(char c, int n) {
  String answer = "";
  for (int j = 0; j < n; j++)
    answer += c;
  return answer;
}

/** Uses StringBuilder to compose a String
    with n copies of character c. */
public static String repeat2(char c, int n) {
  StringBuilder sb = new StringBuilder();
  for (int j = 0; j < n; j++)
    sb.append(c);
  return sb.toString();
}
```

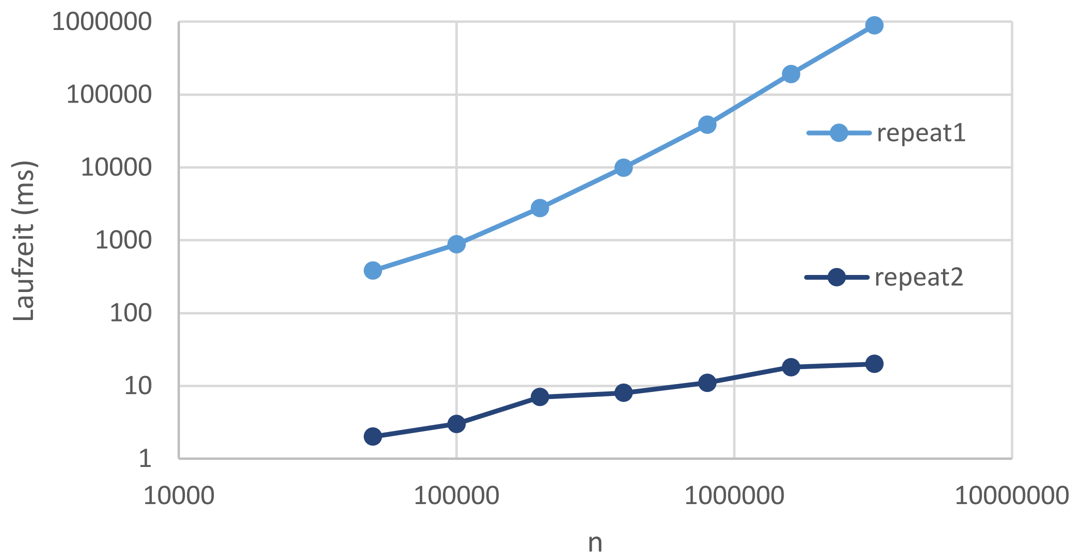
> Als Beispiel betrachten wir zwei verschiedene Java-Implementierungen zur iterativen Erweiterung von Zeichenketten. `repeat1()` beginnt mit einer leeren Zeichenkette und hängt mittels des +=-Operators in jeder Iteration ein weiteres Zeichen an. `repeat2()` verwendet dagegen einen `StringBuilder` und fügt in jeder Iteration mit Hilfe der append-Funktionen ein weiteres Zeichen an. Welche Implementierung ist wohl besser?
>
> Die relevante Problemgröße ist hier die Anzahl `n` der anzuhängenden Zeichen.

Laufzeiten [Slide 4]

n	`repeat1` [ms]	`repeat2` [ms]
50.000	382	2
100.000	876	3
200.000	2.769	7
400.000	9.875	8
800.000	38.633	11
1.600.000	191.121	18
3.200.000	894.805	20

Q: Damit `repeat1` so schnell läuft wie jetzt `repeat2`, benötige ich einfach einen entsprechend schnelleren Prozessor!
A: richtig; **B:** falsch; **D:** weiß nicht

Laufzeiten [Slide 5]



Vergleichen wir nun die Laufzeiten der zwei Implementierungen abhängig von der Problemgröße n. Man kann sofort erkennen, dass `repeat2()` schneller ist und auch bei großem n nicht in die Knie gezwungen wird. In diesem Graphen sind beide Achsen exponentiell zur Basis 10 skaliert. So sieht man gut, dass, wenn man n um den Faktor 10 erhöht, sich auch die Laufzeit von `repeat2()` etwa um den Faktor 10 erhöht. Die Laufzeit von `repeat2()` ist also proportional zu n. Die Laufzeit von `repeat1()` erhöht sich dabei hingegen etwa um den Faktor 100; die Laufzeit von `repeat1()` ist also quadratisch in n.

Aber woher kommt dieser große Unterschied? Dafür werfen wir noch einmal einen Blick auf die Implementierungen und überlegen, wie Java mit Zeichenketten umgeht. `repeat1()` erzeugt bei jeder Iteration eine neue Zeichenkette. Diese ist eine Kopie der alten Zeichenkette ergänzt um den neuen Buchstaben. Für jedes Anhängen eines Zeichens muss also die gesamte Zeichenkette kopiert werden. Da die Zeichenkette sich mit jeder Iteration um eins verlängert, sind die Gesamtkosten dieser Kopien also proportional zur Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n. Diese Summe ist bekanntlich gleich $n(n+1)/2$, also proportional zu n^2.

Im Gegensatz dazu vermeidet `repeat2()` mithilfe des StringBuilders die meisten dieser Kopien, und erzielt so ein lineares Laufzeitverhalten. Wie der StringBuilder dies bewerkstelligt, werden wir in Kürze in dieser Lehrveranstaltung sehen.

Woher diese Diskrepanz? [Slide 6]

- `repeat1` erzeugt bei jedem `+=` einen neuen String, dessen Inhalt vom alten kopiert wird.

  Dies führt zu einem Laufzeitverhalten proportional zu n^2.

  Jedes Hinzufügen hat Kosten, die der aktuellen Stringlänge entsprechen:

  $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1) \propto n^2$$

- `repeat2` vermeidet die Zusatzkosten dieses Kopierens.

  Wie, sehen wir später.

  Das Laufzeitverhalten ist linear in n.

  Die Kosten für jedes Einfügen bleiben konstant:

  $$1 + 1 + \cdots + 1 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Algorithmen... [Slide 7]

Finde das größte Element einer Sequenz.

Algorithmus 1

1. Sortiere die Elemente in aufsteigender Reihenfolge.
2. Liefere das letzte Element zurück.

Algorithmus 2

1. Durchlaufe die Sequenz, und speichere das größte Element.
2. Liefere das gespeicherte Element zurück.

Q: Welcher Algorithmus ist effizienter?
A: Algorithmus 1; **B:** Algorithmus 2; **C:** kaum ein Unterschied; **D:** weiß nicht

... und Implementationen [Slide 8]

In C:

```c
long max_index(const long *v, unsigned long n) {
  long vmax = v[0];
  for (unsigned long i = 1; i < n; i++)
    if (v[i] > vmax)
      vmax = v[i];
  return vmax;
}

long max_pointer(const long *v, unsigned long n) {
  long vmax = *v;
  for (const long *pv = v + 1, *pvn = v + n; pv < pvn; pv++)
    if (*pv > vmax)
      vmax = *pv;
  return vmax;
}
```

`max_pointer()` ist etwas schneller, aber nur bei ausgeschalteter Optimierung. Bei komplexeren Array-Operationen können Pointer-basierte Implementationen jedoch auch mit Optimierung deutlich schneller sein als Index-basierte.

Quiz [Slide 9]

Was ist im Allgemeinen wichtiger für die praktische Laufzeit, die Effizienz des Algorithmus oder die Effizienz des implementierenden Codes?

A: Algorithmus

B: Code

C: beide gleichermaßen

D: weiß nicht

Grenzen empirischer Laufzeitbestimmung [Slide 10]

- Empirische Laufzeit hängt von vielen Faktoren ab (Hardware, Betriebssystem, andere Prozesse, etc.)
- Nur punktuelle Tests, keine volle Charakterisierung
- Keine Informationen über die Ursachen des beobachteten Laufzeitverhaltens
- Algorithmus muss implementiert werden

> Empirische Laufzeitbestimmung ist konzeptuell einfach, aber hat ihre Grenzen. Die Laufzeitmessung hängt von vielen Faktoren ab wie Hardware, Betriebssystem und andere Prozessen. Es handelt sich nur um punktuelle Tests, und die Laufzeit kann nicht allgemein für alle Problemgrößen charakterisiert werden. Sie gibt uns keine Informationen über die Ursachen des beobachteten Laufzeitverhaltens. Überhaupt muss der Algorithmus implementiert werden, um ihn überhaupt empirisch messen zu können. Dies ist in der Praxis ein entscheidender Nachteil.

> Unabhängig von Maschine und Implementierung funktioniert die asymptotische Laufzeitanalyse, die wir im nächsten Video genauer betrachten werden.

2 Zählen primitiver Operationen

Komplexität [Slide 11]

Wir werden hauptsächlich das *Laufzeitverhalten* von *Algorithmen* analysieren.

Diese bildet eine obere Schranke für den Speicherbedarf.

Jeder sinnvoll reservierte Speicherbereich muss auch beschrieben und gelesen werden; das kostet Zeit.

Das Laufzeitverhalten von Algorithmen dominiert den Einfluss der Implementation.

Primitive Operationen [Slide 12]

Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing $n \geq 1$ integers.
  Ensure: Return the maximum element in A.
  $m \leftarrow A[0]$
  for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    if $m < A[i]$ **then**
      $m \leftarrow A[i]$
  return m

- Methodenaufruf; Rückkehr von einer Methode
- Zuweisung
- arithmetische, logische, etc. Operation
- Arrayzugriff per Index

  Anmerkung
  Indexberechnung erfordert arithmetische Operationen.

> Wie können wir das Laufzeitverhalten von Algorithmen bestimmen, ohne sie vorher programmieren zu müssen? Nehmen wir an, jede primitive Operation - wie Methodenaufruf, Rückkehr von einer Methode, Zuweisung, Arrayzugriff, arithmetische und logische Operation - entspricht einer Zeiteinheit. Dann können wir im Prinzip primitive Operationen zählen.

Zählen primitiver Operationen [Slide 13]

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

Anzahl primitiver Operationen

im besten Fall:
im schlechtesten Fall:
im Erwartungsfall:

> Im Beispiel `arrayMax()` ist das für den schlechtesten Fall: 1 (für die Indizierung) + 1 (für die Zuweisung) + 1 (für die Initialisierung von i) + 1 (für die Berechnung von $n-1$) + $(n-1)$ (Iterationen der for-Schleife) *
>
> 1 (für die Indizierung $A[i]$) + 1 (für den Vergleich mit m) + 1 (für die Zuweisung an m) + 1 (für den Vergleich von i mit $n-1$)
>
> + 1 (für den Rücksprung von der Methode) = $4 + (n-1) \cdot 4 + 1 = 4n + 1$ primitive Operationen.

Zählen primitiver Operationen [Slide 14]

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

Anzahl primitiver Operationen

im besten Fall:
im schlechtesten Fall: $4n + 1$
im Erwartungsfall:

> Im besten Fall wird die vom if abhängige Zuweisung nie ausgeführt. Damit reduziert sich die Anzahl der primitiven Operationen um $(n-1) \cdot 2$ auf insgesamt $2n + 3$.

Zählen primitiver Operationen [Slide 15]

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

Anzahl primitiver Operationen

im besten Fall:	$2n + 3$
im schlechtesten Fall:	$4n + 1$
im Erwartungsfall:	

> Der Erwartungsfall wird irgendwo dazwischen liegen, zwischen $2n + 3$ und $4n + 1$ primitiven Operationen.

Welche dieser Zahlen sind uns wichtig? [Slide 16]

Bester Fall: meist weitgehend uninteressant

Erwartungsfall: Interessant, aber oft schwierig zu ermitteln

Schlechtester Fall:

- Relevant und oft einfach bestimmbar
- garantierte Obergrenze für *jede* Eingabe
- Optimierung führt oft zu besseren Algorithmen

> Welche Fälle sind für uns tatsächlich wichtig, der beste, der schlechteste, oder der Erwartungsfall?
>
> Der beste Fall ist meist weitgehend uninteressant, da er nur selten auftritt und ggf. weit unter dem Erwartungsfall liegen kann. Der schlechteste Fall ist dagegen sehr relevant und oft einfach bestimmbar. Er dient als garantierte Obergrenze für *jede* Eingabe. Es zahlt sich aus, bei der Entwicklung von Algorithmen den schlechtesten Fall zu optimieren. Der Erwartungsfall beschreibt Situationen, wie sie in der Praxis typischerweise auftreten werden. Falls er deutlich unter dem schlechtesten Fall liegt, ist es wertvoll, ihn ebenfalls zu optimieren. Allerdings ist er oft schwieriger zu ermitteln.

Quiz [Slide 17]

Die Optimierung welcher dieser Größen (in Abhängigkeit von der Problemgröße) ist meist am effektivsten?

A: Die Anzahl primitiver Operationen im schlechtesten Fall

B: Die Anzahl primitiver Operationen im Erwartungsfall

C: Die Anzahl primitiver Operationen im besten Fall

D: weiß nicht

Asymptotische Analyse [Slide 18]

Wie aussagekräftig ist die Zahl primitiver Operationen?

- Was genau zählt als „primitive Operation“?
- Wie geben wir ihren Zeitbedarf an?

Schlussfolgerung: *Lineare Faktoren sind nebensächlich.*

Wir werden Ressourcenbedarf ***bis auf Proportionalitätsfaktoren*** bestimmen, als Funktion der ***Problemgröße.***

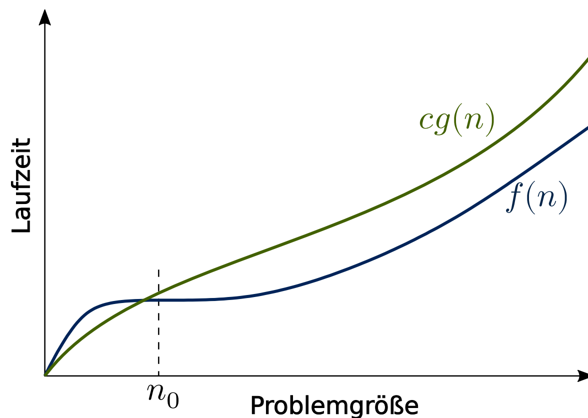
> Beim Zählen der primitiven Operationen sind wir sehr nachlässig vorgegangen. Was genau ist eine primitive Operation? Zählt das Laden eines Wertes in ein Prozessor-Register dazu? Dauern alle diese Operationen tatsächlich gleich lange?
>
> Damit es unklar, ob die Laufzeit von `arrayMax()` tatsächlich $4n+1$ Zeiteinheiten beträgt. Vielleicht ist sie in Wirklichkeit $4n+8$, oder $7n+6$. Diese Konstanten können wir nicht wirklich bestimmen; sie sind damit bedeutungslos. Was hingegen sehr bedeutsam ist, ist die Tatsache, dass die Laufzeit linear in n ist. Egal, wie wir diese Konstanten wählen – das Ergebnis ist immer eine lineare Funktion in n.
>
> Wir können also auf das Zählen primitiver Operationen komplett verzichten. Dies vereinfacht unsere Analyse drastisch, ohne ihre Aussagekraft zu beeinträchtigen.
>
> Wir werden also den Ressourcenbedarf von Algorithmen unabhängig von linearen Faktoren und additiven Konstanten charakterisieren, und uns darauf konzentrieren, wie häufig *irgendetwas* in Abhängigkeit von der Problemgröße n passiert. Insbesondere gilt unser Interesse der Wachstumsrate des Ressourcenbedarfs als Funktion von n.

3 Groß-O Notation

Groß-O *(Big-Oh)* [Slide 19]

Definition: Seien $f(n)$ und $g(n)$ Funktionen, die nicht-negative ganze Zahlen auf nicht-negative reelle Zahlen abbilden. $f(n) \in O(g(n))$ falls eine reelle Konstante $c > 0$ und eine ganzzahlige Konstante $n_0 \geq 1$ existieren, so dass

$f(n) \leq cg(n) \quad \forall n \geq n_0$.



Lies: „f von n ist Groß-O von g von n“.
Intuition: $f(n)$ besitzt keine höhere Wachstumsrate (ist nicht stärker nach oben gekrümmt) als $g(n)$.
Beispiele:

- $f(n) = 2n$ und $g(n) = n$ wachsen mit derselben – nämlich mit konstanter – Rate (sie sind gleich stark nach oben gekrümmt, nämlich gar nicht).
- $f(n) = 3n^2$ wächst mit geringerer Rate (ist schwächer nach oben gekrümmt) als $g(n) = n^3$, denn ab einem bestimmten n (nämlich $n = 3$) wird $f(n)$ $g(n)$ nicht mehr übersteigen.

Die wichtigste Methode zur Analyse des Ressourcenbedarfs von Algorithmen ist die sogenannte Groß-O-Charakterisierung, auf englisch Big-Oh.

Im Folgenden bezeichnet n die Problemgröße, also z.B. bei `arrayMax()` die Größe des Arrays, und $f(n)$ bezeichnet den Ressourcenbedarf als Funktion der Problemgröße, also z.B. das Laufzeitverhalten. Wir characterisieren nun die im Detail unbekannte Funktion $f(n)$ mittels einer sehr einfachen Funktion $g(n)$ unserer Wahl, die $f(n)$ für große n nach oben beschränkt. Sehen wir uns die Definition an:

Seien $f(n)$ und $g(n)$ Funktionen, die nicht-negative ganze Zahlen auf nicht-negative reelle Zahlen abbilden. $f(n) \in O(g(n))$ falls eine reelle Konstante $c > 0$ und eine ganzzahlige Konstante $n_0 \geq 1$ existieren, so dass $f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0$.

Wir können also n_0 und c frei wählen. Gelingt es uns, diese so zu wählen, dass $cg(n)$ für *alle* $n \geq n_0$ mindestens so groß ist wie $f(n)$, dann ist $f(n) \in O(g(n))$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Wachstumsrate von $f(n)$ nicht größer ist als die Wachstumsrate von $g(n)$. Intuitiv ist $g(n)$ mindestens so stark nach oben gekrümmt wie $f(n)$.

Zum Beispiel ist $2n \in O(n)$, mit $n_0 = 1$ und $c = 2$. Beide sind gleich stark nach oben gekrümmt, nämlich gar nicht.

$3n^2$ ist schwächer nach oben gekrümmt als n^3, denn ab einem bestimmten Wert von n wird $3n^2 n^3$ nicht mehr übersteigen. $3n^2$ ist also $O(n^3)$.

$3n^2$ ist sogar $O(n^2)$, wie wir mit $n_0 = 1$ und $c = 3$ sofort sehen.

> Mit der Notation $f(n) \in O(g(n))$ betrachten wir $O(g(n))$ als eine Menge, nämlich die Menge aller Funktionen $f(n)$, die die Eigenschaft gemäß dieser Definition besitzen. Verbal behandeln wir dagegen $O(g(n))$ als eine Eigenschaft von $f(n)$. Wir schreiben also $f(n)$ ist *Element der Menge* $O(g(n))$, und wir lesen $f(n)$ *ist* $O(g(n))$.

Beispiel [Slide 20]

Proposition:

$f(n) = 8n + 4 \in O(n)$.

Beweis (durch vollständige Induktion): Sei $c = 9$ und $n_0 = 5$.

Induktionsanfang: $8 \cdot 5 + 4 = 44 \leq 45 = 9 \cdot 5$

Induktionsschritt: Angenommen, $8n + 4 \leq 9n$ für einen bestimmten Wert von n. Dann gilt diese Ungleichung auch für $n + 1$:

$$\begin{aligned} 8(n+1) + 4 &\leq 9(n+1) \\ 8n + 4 + 8 &\leq 9n + 9 \end{aligned}$$

Es gibt i.d.R. unendlich viele mögliche Beweise, da c und n_0 voneinander abhängen. In der Praxis ist ein Induktionsbeweis oft nicht nötig, wenn offensichtlich ist, dass das, was für n_0 gilt, ebenfalls für alle $n > n_0$ gilt. Hier ist dies dadurch offensichtlich, dass wir $c = 9$ als Faktor von n gewählt haben, was größer ist als der Faktor 8 in $f(n)$.

> Betrachten wir nun ein ausführliches Beispiel.
>
> Wir wollen zeigen, dass $f(n) = 8n + 4 \in O(n)$ ist. Hierzu wählen wir c und n_0 so, dass $8n_0 + 4 \leq cn_0$. Dies funktioniert z.B. mit $c = 9$ und $n_0 = 5$: $8 \cdot 5 + 4 = 44$, was kleiner ist als $9 \cdot 5 = 45$. Genau genommen müssen wir nun noch beweisen, dass diese Ungleichung nicht nur für n_0 gilt, sondern auch für alle $n > n_0$. Dies können wir durch vollständige Induktion tun. Den Induktionsanfang haben wir mit der Ungleichung für n_0 bereits abgehakt. Im Induktionschritt nehmen wir an, dass die Ungleichung $8n + 4 \leq 9n$ für einen beliebigen Wert von $n \geq n_0$ zutrifft, und zeigen dann, dass daraus folgt, dass sie damit auch für $n+1$ zutreffen muss. Wir tun dies, indem wir n durch $n+1$ ersetzen, ohne dass die Ungleichung verletzt wird. Da wir die Induktionsannahme im Induktionsanfang nachgewiesen haben, muss die Ungleichung für alle $n \geq n_0$ gelten. Damit ist der Beweis beendet.
>
> Es gibt in der Regel unendlich viele mögliche Beweise, da c und n_0 voneinander abhängig frei gewählt werden können.
>
> Wie geht man in der Praxis vor? Hier haben wir c um eins größer gewählt als den Koeffizienten des am schnellsten wachsenden Terms von $f(n)$, nämlich die 8. Damit haben wir sichergestellt, dass $g(n)$ schneller wächst als $f(n)$. Nun mussten wir lediglich noch n_0 so bestimmen, dass $g(n_0)$ tatsächlich größer ist als $f(n_0)$.
>
> Da wir durch die Wahl von c bereits sichergestellt haben, dass $g(n)$ schneller wächst als $f(n)$, können wir uns übrigens sparen, dies durch den Induktionsschritt erneut zu beweisen.

Quiz [Slide 21]

Groß-O ist Blödsinn. Nehmen wir doch einmal diese beiden Funktionen:

$$100000n \in O(n)$$
$$n^2 \in O(n^2)$$

Dabei ist $100000n$ doch viel größer als n^2!

A: Stimmt. Hier ist Groß-O sinnlos.

B: Stimmt nicht. Auch hier ist Groß-O aussagekräftig.

C: Mindestens eine der beiden o.g. Groß-O-Charakterisierungen ist falsch.

D: weiß nicht

Wichtige Eigenschaften von Groß-O [Slide 22]

- Wenn $f(n) \in O(g(n))$, dann $kf(n) \in O(g(n))$.

  Beweisskizze: k wird in c hineinmultipliziert.

  Insbesondere, $a^b \in O(1)$, $a^{n+b} \in O(a^n)$, und die Basis von Logarithmen wird weggelassen.

  a^b hängt nicht von n ab, $a^{n+b} = a^b a^n$, und da $\log_a n = \frac{1}{\log_b a} \log_b n$ (siehe unten), $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

- Wenn $e(n), f(n) \in O(g(n))$, dann $e(n) + f(n) \in O(g(n))$.

  Beweis: Wächst o.B.d.A. $f(n)$ schneller als $e(n)$, dann ist $e(n) + f(n) < 2f(n)$.

  Zusammen folgt insbesondere, dass $f(n) = \sum_{d=0}^{D} a_d n^d \in O(n^D)$.

  Wichtig

  Ein Polynom D-ten Grades in n ist immer $O(n^D)$.

- Wenn $e(n) \in O(g(n))$ und $f(n) \in O(h(n))$, dann $e(n)f(n) \in O(g(n)h(n))$.

  Beweisskizze:
  $c_{ef} = c_e c_f$; $n_{0,ef} = \max\{n_{0,e}, n_{0,f}\}$
  Dies ist keine Überraschung. Von Bedeutung ist hier, dass keine stärkere Aussage möglich ist.

Logarithmen-Spickzettel

- Per Definition ist $\log_b n = x$ genau dann, wenn $b^x = n$. Folglich sind $b^{\log_b n} = n$, $\log_b b^x = x$ und $\log_b b = 1$.
- Sei zusätzlich $\log_b m = y$, also $b^y = m$. Es folgt $nm = b^x b^y = b^{x+y}$, also $\log_b(nm) = x + y = \log_b n + \log_b m$.

  Logarithmen erlauben uns, Multiplikationen durch Additionen zu ersetzen!
- Logarithmen verschiedener Basen sind zueinander proportional:

$$\begin{aligned} b^{cx} &= (b^c)^x &= n \\ \log_b n &= cx \\ \log_{b^c} n &= x \\ \frac{\log_b n}{c} &= \log_{b^c} n &= x \\ a &= b^c \\ \frac{\log_b n}{\log_b a} &= \log_a n &= x \end{aligned}$$

  Folglich sind Logarithmen verschiedener Basen a und b durch konstante Faktoren der Form $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ untereinander verbunden.
- $b^{\log_a n}$ ist eine Potenz von n:

$$b^{\log_a n} = b^{\frac{\log_b n}{\log_b a}} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\frac{1}{\log_b a}} = n^{\frac{1}{\log_b a}}$$

  Insbesondere, falls $\log_b a < 1$, dann $n^{\frac{1}{\log_b a}} \notin O(n)$.

  Bei Algorithmen mit solcher Laufzeit ist i.d.R. $b > 1$. In diesem Fall ist $\log_b a < 1$ falls $a < b$. Umgekehrt bedeutet dies, dass $b^{\log_a n} \in O(n)$ falls $1 \leq b \leq a$.

Als Nächstes betrachten wir weitere, wichtige Eigenschaften von Groß-O. Alle diese Eigenschaften folgen recht direkt aus der Definition von Groß-O; Sie sollten diese Beweise selbstständig führen.

Erstens: Wenn $f(n) \in O(g(n))$, dann ist $kf(n) \in O(g(n))$ für eine beliebige Konstante k. Insbesondere ist $a^b \in O(1)$, und $a^{n+b} \in O(a^n)$ und die Basis von Logarithmen wird entsprechend weggelassen. Überlegen Sie sich, warum!

Zweitens: Wenn $e(n)$ und $f(n) \in O(g(n))$, dann ist auch die Summe von $e(n) + f(n) \in O(g(n))$.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt insbesondere, dass Polynome D-ten Grades immer $O(n^D)$ sind.

Drittens: Wenn $e(n) \in O(g(n))$ und $f(n) \in O(h(n))$, dann ist $e(n)f(n) \in O(g(n)h(n))$. Dies ist nicht weiter überraschend. Wir halten hier lediglich fest, dass keine stärkere Aussage möglich ist.

O(so klein wie möglich) [Slide 23]

Gefragt ist die *kleinste Menge* Groß-O, die die analysierte Funktion enthält, und zwar in ihrer *kompaktesten* Darstellung.

$f(n) = 4n^3 + 3n^2 \in ...$

- Inkorrekt:

  $O(1), O(n^2), O(\sin n)$

- Korrekt, aber nicht hilfreich:

  $O(n^4), O(2^n), O(4n^3), O(n^3 + n^2)$

  Punktabzug bei Hausübungen und Prüfungen!

- Korrekt und aussagekräftig:

  $O(n^3)$

Wichtig

In der Praxis genügt es meist,

- alle konstanten Faktoren und
- alle bis auf den am schnellsten wachsenden Term

zu eliminieren.

Aber: $2^{an} = (2^a)^n \notin O(2^n)$!

> Damit Groß-O-Charakterisierungen aussagekräftig sind, ist es wichtig, dass wir jeweils die kleinste Menge Groß-O und ihre kompakteste Darstellung finden. Hier ist zum Beispiel die Funktion $f(n) = 4n^3 + 3n^2$ gegeben. Welche Groß-O-Charakterisierung ist aussagekräftig?
>
> $O(1)$, $O(n^2)$ und $O(sinn)$ sind inkorrekt, da sie zu klein gewählt sind und $f(n)$ nicht darin enthalten ist.
>
> $O(n^4)$ und $O(2^n)$ sind unnötig große Mengen; eine engere Charakterisierung von $f(n)$ ist möglich.
>
> $O(4n^3)$ und $O(n^3 + n^2)$ sind zwar korrekt, aber ihre Darstellung ist nicht kompakt. Beide sind nämlich mit der Menge $O(n^3)$ identisch.
>
> Korrekt und aussagekräftig ist $O(n^3)$, da diese Menge minimal und kompakt ist.
>
> In der Praxis genügt es meist, alle konstanten Faktoren und alle bis auf den am schnellsten wachsenden Term zu eliminieren, um eine enge und kompakte Groß-O-Charakterisierung zu erhalten.
>
> Aber Achtung z.B. bei Exponentialfunktionen: $2^{an} = (2^a)^n$, und das ist nicht $O(2^n)$!

Quiz [Slide 24]

Welche ist die beste Charakterisierung von $f(n) = 3n^2 \log n$?

A: $f(n) \in O(n^2)$

B: $f(n) \in O(n^3)$

C: $f(n) \in O(n^2 \log n)$

D: weiß nicht

Quiz [Slide 25]

Welche der folgenden Aussagen ist falsch:

A: $\log n^2 \in O(\log n)$

B: $3^{3n} \in O(3^n)$

C: $5n^4 + 3n^3 \in O(3n^4)$

D: weiß nicht

Groß-O-Analyse von Algorithmen [Slide 26]

Aus den Eigenschaften der Groß-O-Notation folgt:

Unnötig: Zählen primitiver Operationen.

Nötig: Bestimmen, wie häufig *irgendetwas* in Abhängigkeit von n geschieht.

Anmerkung

Mit Groß-O (oder verwandten Konzepten) charakterisiertes Laufzeitverhalten wird als ***Laufzeit-Komplexität*** bezeichnet.

> Wegen ihrer Konzentration auf den Verlauf der Funktion bei großen n wird die Groß-O-Analyse als asymptotisch bezeichnet. Der asymptotische Ressourcenbedarf eines Algorithmus wird auch als seine asymptotische Komplexität bezeichnet.
>
> Die Groß-O-Notation ist unser wichtigstes Hilfsmittel zur Charakterisierung des Ressourcenbedarfs von Algorithmen. Da sie lineare Faktoren und additive Konstanten nicht berücksichtigt, erübrigt sich die Analyse individueller Operationen. Dies macht die Groß-O-Notation in der Praxis sehr einfach anwendbar. Nichtsdestotrotz macht sie starke Aussagen über den Ressourcenbedarf von Algorithmen in Abhängigkeit von der Problemgröße, wie wir nun an einigen Beispielen sehen werden.

Analyse: Einige einfache Fälle [Slide 27]

Primitive Operationen: konstante Ausführungszeit, $O(1)$

Sequenzen von Operationen: Die Summe, d.h. das Maximum der Komplexitäten der Elemente der Sequenz.

Schleifen über n: $O(nf(n))$ wenn der Schleifenkörper $O(f(n))$ ist

```
for i ← 1 to n do
  ...
```

Schleifen mit exponentiellem Inkrement: $O(\log n)$

```
i ← 1
while i ≤ n do
  i ← 2i
```

Die entscheidende Frage: Wie häufig wird die Schleife (in Abhängigkeit von n) durchlaufen?

> Betrachten wir nun diverse Beispielfälle zur Laufzeitanalyse.
>
> Primitive Operationen laufen in konstanter Zeit; daher sind sie grundsätzlich $O(1)$. Die asymptotische Laufzeit von Sequenzen von Operationen ist die Summe der asymptotischen Laufzeiten der einzelnen Operationen. Aus der Polynom-Eigenschaft von Groß-O folgt, dass diese Summe gleich der maximalen asymptotischen Laufzeit aller Operationen der Sequenz ist.
>
> Einfache Schleifen mit n Iterationen haben eine asymptotischen Laufzeit von $O(n)$ mal der asymptotischen Laufzeit des Schleifenkörpers. Schleifen, deren Zähler exponentiell wächst, haben entsprechend eine asymptotische Laufzeit von $O(\log n)$ mal der asymptotischen Laufzeit des Schleifenkörpers.

Analyse: Geschachtelte Schleifen [Slide 28]

Identische Schleifen: Wie oben: $O(n^2)$. Drei geschachtelte Schleifen sind $O(n^3)$, etc.

```
for i ← 1 to n do
  for j ← 1 to n do
    ...
```

Unabhängige Schleifen:

$O(mn)$

```
for i ← 1 to m do
  for j ← 1 to n do
    ...
```

Inkrementierte Schleifen:

$O(n^2)$

```
for i ← 1 to n do
  for j ← 1 to i do
    ...
```

> Bei geschachtelten Schleifen folgt das Laufzeitverhalten aus dem bereits gesagten: Zwei geschachtelte Schleifen mit jeweils n Iterationen haben eine asymptotische Laufzeit von $O(n^2)$, drei eine von $O(n^3)$, usw.
>
> Manchmal ist es hilfreich, ein Laufzeitverhalten anhand mehrerer Problemgrößen zu charakterisieren. Haben wir beispielsweise zwei geschachtelte Schleifen, die m-mal bzw. n-mal durchlaufen werden, wobei m und n nicht voneinander abhängen, dann ist die Gesamtlaufzeit folglich $O(mn)$.
>
> Die hier gezeigte inkrementierte Schleife lässt sich übrigens sich nicht enger charakterisieren als $O(n^2)$, obwohl der innere Schleifenkörper weniger oft durchlaufen wird als n^2 mal. Es ist eine wertvolle Übung, dies formal nachzuweisen

Analyse: `arrayMax` [Slide 29]

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

- Die Schleife wird $n-1$ Mal durchlaufen.
- Inner- und außerhalb der Schleife finden sich nur Operationen, die in konstanter Zeit ablaufen.
- Daher ist `arrayMax` $O(n)$.

> Am besten festigen wir diese Erkenntnisse anhand eines bereits bekannten Beispiels: `arrayMax()` sucht das größte Element in einem Array A. Der Algorithmus besteht aus einer Sequenz von drei Operationen: einer Zuweisung, einer Schleife, und der return-Anweisung. Da die asymptotische Laufzeit einer Sequenz gleich der maximalen asymptotischen Laufzeit seiner Elemente ist, ist die asymptotische Laufzeit von `arrayMax()` gleich der asymptotischen Laufzeit der Schleife. Die Schleife wiederum besteht aus einer Sequenz verschiedener Operationen, deren Laufzeiten jedoch alle konstant sind. Daher bleibt die Feststellung, dass die Schleife $n-1$ mal durchlaufen wird. Somit ist `arrayMax()` $O(n)$.

Quiz [Slide 30]

```
i ← 1
while i ≤ n do
  i ← 2i
for j ← 1 to i do
  n ← n + 1
```

Was ist die asymptotische Laufzeit dieses Codesegments in Abhängigkeit von n?

A: $O(n)$

B: $O(n \log n)$

C: $O(2^n)$

D: weiß nicht

Analyse: `prefixAverages` [Slide 31]

Berechnen wir $A_i = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} X_j$ für $i = 0, ..., n-1$:

Algorithm `prefixAverages1`(X):
  Require: An $n-$element array X of numbers.
  Ensure: Return an $n-$element array A of numbers such that
    $A[i]$ is the average of elements $X[0], \ldots, X[i]$.
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $a \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow 0$ **to** i **do**
      $a \leftarrow a + X[j]$
    $A[i] \leftarrow a/(i+1)$
  return A

- Es gibt zwei geschachtelte Schleifen des inkrementierten Typs.
- Alle anderen Operationen sind primitiv und konstanter Laufzeit.
- Daher ist die Gesamtlaufzeit $O(n^2)$.

Ein effizienterer Algorithmus [Slide 32]

Algorithm `prefixAverages2`(X):
  Require: An $n-$element array X of numbers.
  Ensure: Return an $n-$element array A of numbers such that
    $A[i]$ is the average of elements $X[0], \ldots, X[i]$.
  $s \leftarrow 0$
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $s \leftarrow s + X[i]$
    $A[i] \leftarrow s/(i+1)$
  return A

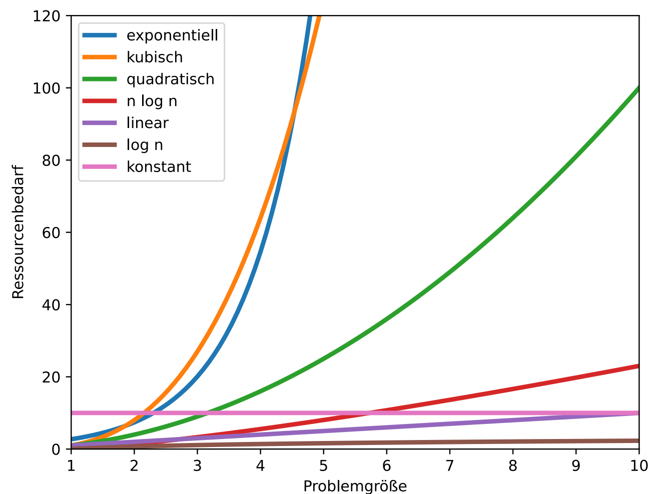
Laufzeit?

Eine Hierarchie von Funktionen [Slide 33]

Groß-O bezeichnet eine obere Schranke der *Wachstumsrate* von Funktionen.

Funktionen im mathematischen Sinn.

$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^{a>1}) \subset O(2^n)$



> Welche Funktionen g(n) treten in der Praxis bei Charakterisierungn der Form $O(g(n))$ auf? Hier sehen wir die wichtigsten. $O(1)$ ist die konstante Laufzeit primitiver Operationen. $O(\log n)$ ist beispielsweise die Höhe einer balancierten Baumstruktur oder die Laufzeit einer Binärsuche. $O(n)$ ist die lineare Laufzeit einer Schleife über Datenelemente. $O(n \log n)$ ergibt sich aus einer Verschachtelung der beiden Letztgenannten, und ist die schnellstmögliche Laufzeit von Sortieralgorithmen, die auf paarweisen Vergleichen beruhen. $O(n^2)$ oder $O(n^3)$ tritt beispielsweise bei zwei bzw. drei geschachtelten Schleifen oder dem Aufzähllen aller Paare bzw. Tripel auf. Exponentielle Laufzeiten von $O(2^n)$ ergeben sich beispielsweise bei der Aufzählung aller Kombinationen einer Menge von n Elementen. Algorithmen mit exponentieller Laufzeit lassen sich nur auf relativ kleine Datenmengen anwenden. Auch die Verwendung vielfach schnellerer Rechner ändert kaum etwas daran. Algorithmen mit logarithmischer Laufzeit gelten hingegen als effizient und lassen sich in der Praxis auf nahezu beliebig große Datenmengen anwenden.

Typische Laufzeit-Komplexitäten [Slide 34]

konstant: eine primitive Operation; eine Sequenz von Operationen unabhängig von den Eingangsdaten

logarithmisch: die Höhe eines balancierten Baums; binäre Suche

linear: Schleifen über Datenelemente

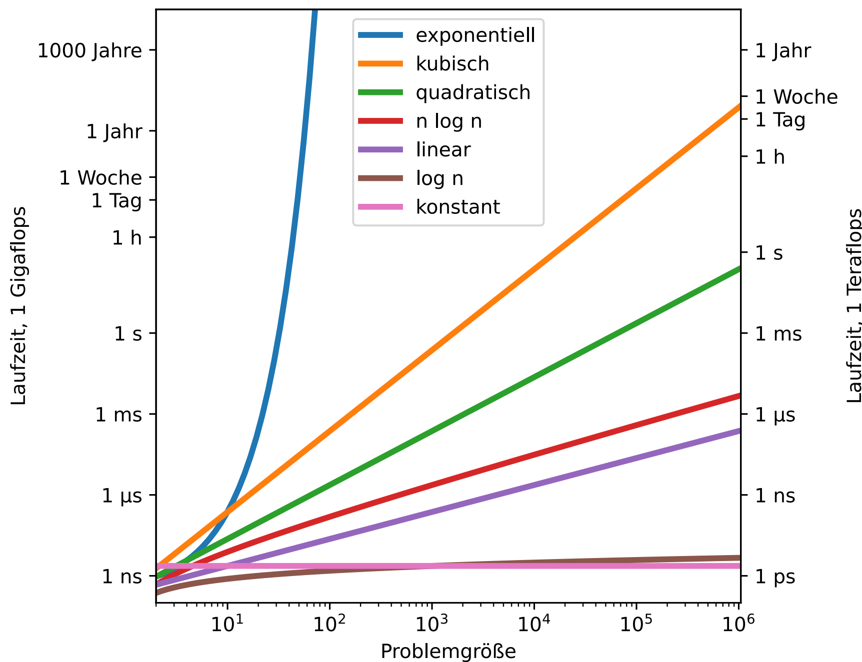
$n \log n$**:** Schachtelung des Obigen; Sortieren

quadratisch: zwei geschachtelte Schleifen; Aufzählen aller Paare

kubisch: drei geschachtelte Schleifen; Aufzählen aller Tripel

exponentiell: Kombinationen

Laufzeiten [Slide 35]



Wie große Probleme können wir innerhalb eines gegebenen Zeitbudgets lösen, z.B. 1ns?

	1 Gflops	**1 Tflops**	Faktor 1000
$\log_2 n$	20	praktisch ∞	
n	4	4000	Faktor 1000
n^2	2	63	Faktor $\sqrt{1000} \approx 32$
2^n	2	10	

Bei exponentiellem Laufzeitverhalten bewirkt selbst eine Vervielfachung der Rechenleistung kaum eine Erweiterung der handhabbaren Problemgröße!
Hier z.B. vergrößert eine weitere Ver1000fachung der Rechenleistung die Problemgröße von 10 auf 11.

Mehr Ressourcen lösen größere Probleme? [Slide 36]

- *Ressource*: Laufzeit bei fixer Rechenleistung bzw. Rechenleistung bei fixer Laufzeit
- Ressourcenbedarf $r(n)$ als Funktion der Problemgröße n
- Umkehrfunktion: Lösbare Problemgröße $n(r)$ als Funktion der zur Verfügung stehenden Ressourcen

Wachstum der lösbaren Problemgröße, wenn wir die zur Verfügung stehenden Ressourcen um einen Faktor k erhöhen:

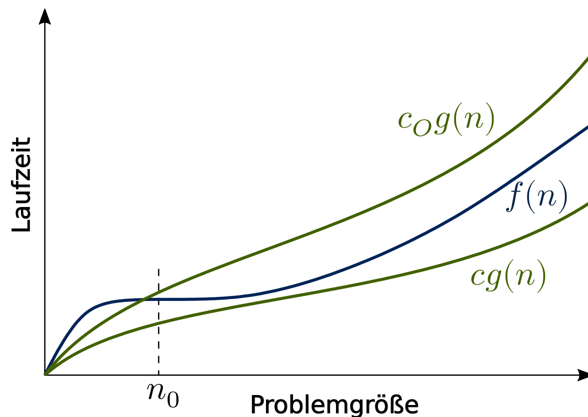
$r(n)$	$n(r)$	$n(kr)$			Wachstum
$\log_2 n$	2^r	2^{kr}	$=$	$(2^r)^k$	exponentiell
n	r	kr			multiplikativ mit Faktor k
n^2	$\sqrt{r}$	$\sqrt{kr}$	$=$	$\sqrt{k}\sqrt{r}$	multiplikativ mit Faktor $\sqrt{k}$
2^n	$\log_2 r$	$\log_2(kr)$	$=$	$\log_2 k + \log_2 r$	additiv

Verwandte von Groß-O [Slide 37]

Definition: Seien $f(n)$ und $g(n)$ Funktionen, die nicht-negative ganze Zahlen auf nicht-negative reelle Zahlen abbilden. $f(n) \in \Omega(g(n))$ wenn $g(n) \in O(f(n))$, d.h., eine reelle Konstante $c > 0$ und eine ganzzahlige Konstante $n_0 \geq 1$ existieren, so dass

$$f(n) \geq cg(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Definition: $f(n) \in \Theta(g(n))$ wenn $f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.



Für $\Theta(g(n))$ werden die Beweise für $O(f(n))$ und $\Omega(f(n))$ *separat* geführt. Die Konstanten werden immer $c_O \neq c_\Omega$ sein müssen (wie hier illustriert). Die n_0 dürfen sich also ebenfalls unterscheiden, oder man wählt ein gemeinsames $n_0 = \max\{n_{0,O}, n_{0,\Omega}\}$.

> Im vorherigen Video haben wir bereits Groß-O kennengelernt. In dieser Einheit besprechen wir zwei verwandte Konzepte.
>
> Groß-Omega funktioniert genauso wie Groß-O, aber bildet eine untere statt einer oberen Schranke. $f(n) \in \Omega(g(n))$ wenn $g(n) \in O(f(n))$, das heißt eine reelle Konstante $c > 0$ und eine ganzzahlige Konstante $n_0 \geq 1$ existieren, so dass $f(n) \geq cg(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Hier wird die Formel von Groß-O umgedreht.
>
> Groß-Theta bildet die Kombination von Groß-O und Groß-Omega, genau genommen die Schnittmenge. Das heißt, $f(n) \in \Theta(g(n))$ wenn $f(n) \in O(g(n))$ und auch $\in \Omega(g(n))$ ist. Um zu ermitteln, ob eine gegebene Funktion $f(n) \in \Theta(g(n))$ ist, ermitteln wir zunächst $g(n)$ mit $f(n) \in O(g(n))$, und testen anschließend, ob $f(n)$ auch $\Omega(g(n))$ ist.

Grenzen von Groß-O [Slide 38]

Was ist in der Praxis vorzuziehen:

- 2^n oder n^{100}?

  Ab $n = 997$ ist $2^n > n^{100}$.

- $10^{100}n$ oder n^2?

- 10 oder $\log \log n$?

  Astronomen nehmen an, dass das Universum weniger als ein *Googol* (10^{100}) Atome enthält; $\log \log 10^{100} < 6$.

Mein Algorithmus ist doppelt so schnell wie deiner!

Diese wird durch Groß-O nicht erfasst; $O(2n) = O(n)$

Wichtig

Bei Problemen endlicher Größe darf man die *konstanten Faktoren* nicht aus den Augen verlieren, die bei der asymptotischen Analyse unter den Tisch fallen.

> Die Groß-O-Notation bezieht sich auf den Grenzfall unendlich großer Probleme. Hier ist sie einfach anwendbar und sehr aussagekräfig. Dennoch sollte man real erwartbare Problemgrößen nicht aus dem Blick verlieren.
>
> Welcher Algorithmus ist vorzuziehen, einer mit einer Laufzeit von 2^n oder einer mit einer Laufzeit von n^{100}?
>
> $O(n^{100})$ ist eine Untermenge von $O(2^n)$, also empfiehlt uns Groß-O den n^{100}-Algorithmus. Bei einem derart großen Exponenten lohnt es sich allerdings, genauer hinzuschauen. Bis $n = 996$ ist $2^n < n^{100}$.
>
> Umgekehrt bedeutet dies allerdings: Bereits ab der sehr moderaten Problemgröße von $n = 997$ ist der $O(2^n)$-Algorithmus schneller als der $O(n^{100}$-Algorithmus – bis auf den konstanten Faktor c, der sich hinter der Groß-O-Notation versteckt.
>
> Diesen konstanten Faktor sollte man ebenfalls nicht aus den Augen verlieren: $O(10^{100}n) = O(n)$, aber 10^{100} ist ein so enorm großer Faktor, dass n^2 ihn in der Praxis kaum erreichen wird. Astronomen schätzen, dass das Universum weniger als 10^{100} Atome enthält. Allerdings werden derartig große Konstanten in realen Algorithmen niemals auftreten.
>
> Umgekehrt wächst $\log \log n$ so enorm langsam, dass $\log \log 10^{100} < 6$ ist. In der Praxis kann $\log \log n$ also als konstant angesehen werden.
>
> Vielleicht der relevanteste Aspekt, der bei der Groß-O-Analyse unter den Tisch fällt, ist die Frage, ob ein Algorithmus um einen konstanten Faktor schneller ist als ein anderer. Um diese Frage zu beantworten, wurde die Werkzeugkiste der asymptotischen Analyse kürzlich um die Tilde-Notation erweitert.

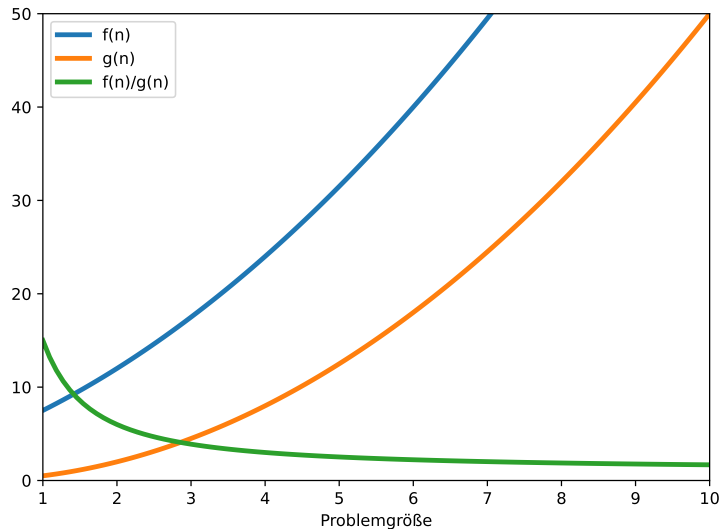
4 Tilde-Approximation

Tilde-Approximation [Sedgewick und Wayne 2014] [Slide 39]

Definition: $f(n) \sim g(n)$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Beispiel:

$$\frac{1}{2}n^2 + 3n + 4 \;\sim\; \frac{1}{2}n^2$$



> Bei der Tilde-Approximation bleibt, im Gegensatz zur Groß-O-Notation, der Koeffizient des am schnellsten wachsenden Terms erhalten. $f(n)$ ist Tilde $g(n)$ heißt, dass sich das Verhältnis von $f(n)$ zu $g(n)$ bei wachsenden n dem Wert 1 annähert.
>
> In unserem Beispiel heißt das konkret: $1/2n^2 + 3n + 4$ nähert sich für $n \to \infty$ an $1/2n^2$ an. Der quadratische Term dominiert für große n über die linearen und konstanten Terme.

Θ und Tilde [Slide 40]

2	$\Theta(1)$	~ 2
$2n + 3$	$\Theta(n)$	$\sim 2n$
$2n^2 + 3n + 4$	$\Theta(n^2)$	$\sim 2n^2$
$\log_2 n + 1$	$\Theta(\log n)$	$\sim \log_2 n$

Θ vs. Tilde [Slide 41]

Θ
Definition einfacher anwendbar
Konstanten vernachlässigbar

Tilde
Definition anschaulicher
Algorithmus-bedingte Konstanten bleiben erhalten
Bei ungenauer Analyse möglicherweise irreführend:

```
for i ← 1 to 2n do
  s ← s + i

for i ← 1 to n do
  s ← s + 2i + n
```

Für (ungenaue) Tilde-Approximation – aber nicht für Θ – sieht eine kürzere Schleife besser aus, auch wenn innerhalb jeder Iteration mehr Rechenzeit anfällt als bei der längeren Schleife.
In diesem Beispiel allerdings, in dem beide Schleifen dasselbe Ergebnis berechnen, läuft die zweite Schleife tatsächlich fast doppelt so schnell wie die erste, da Arithmetik effizienter ist als Sprünge.

> Wenn wir Theta und Tilde vergleichen, erkennen wir noch einmal klar, dass bei der Tilde-Approximation der Koeffizient des am schnellsten wachsenden Terms erhalten bleibt. Bei der Theta-Analyse wird dieser nicht berücksichtigt.
>
> Dies ist ein Vorteil der Tilde-Approximation mit großer praktischer Bedeutung. Er wird jedoch durch einen hohen Preis bezahlt: Um diese Konstante zu ermitteln, müssen wir fast so genau hinschauen wie beim Zählen elementarer Operationen.
>
> In diesem Beispiel sieht die zweite Schleife für die Tilde-Approximation doppelt so schnell aus wie die erste, obwohl die Gesamtanzahl aller primitiven Operationen nur um eins geringer ist, die Multiplikation $2n$. Andererseits läuft auf heutigen Rechnern die zweite Schleife tatsächlich fast doppelt so schnell wie die erste, da Arithmetik effizienter ist als Sprünge.

5 Beweistechniken

Beispiel und Gegenbeispiel [Slide 42]

Beispiel

Proposition: Es gibt ganze Zahlen größer als eins, die gleich dem Produkt der Summe und des Produkts ihrer Ziffern sind.

Beweis (durch Beispiel):

$$\begin{aligned} 135 &= 9 \cdot 15 \\ 144 &= 9 \cdot 16 \end{aligned}$$

(und das sind alle.)

Beispiel

Proposition: Prof. Überschlau behauptet, alle Zahlen $2^i - 1$ seien prim. Er hat Unrecht.

Beweis (durch Gegenbeispiel): $2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$

Kontraposition [Slide 43]

Wir beweisen $A \Rightarrow B$, indem wir die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen.

Beispiel

Proposition: Seien a und b ganze Zahlen. Wenn ab gerade ist, dann ist mindestens eine der Zahlen a und b gerade.

Beweis: *Sind a und b ungerade, dann ist ab ungerade.* Seien $a = 2i + 1$ und $b = 2j + 1$. Dann gilt $ab = 4ij + 2i + 2j + 1 = 2(2ij + i + j) + 1$; also ist ab ungerade.

Widerspruch [Slide 44]

Wir beweisen $A \Rightarrow B$, indem wir zeigen, dass $\neg B$ im Widerspruch zu A steht.

... woraus also $\neg A$ folgt. Widerspruchs- und Kontrapositionsbeweise sind tatsächlich nahe verwandt und folgen derselben Logik.

Beispiel

Proposition: Seien a und b ganze Zahlen. Ist ab ungerade, dann sind sowohl a als auch b ungerade.

Beweis: Angenommen, *ab sei ungerade.* Sei o.B.d.A. a gerade, also, $a = 2i$. Also ist $ab = 2ib$, d.h., *ab ist gerade*, was der o.g. Annahme widerspricht. Es folgt, dass sowohl a als auch b ungerade sind.

Vollständige Induktion [Slide 45]

Zu beweisen:

Induktionsanfang: Die Proposition ist für $n = n_0$ wahr.

Induktionsschritt: Ist die Proposition für ein beliebiges n wahr, dann ist sie auch für $n + 1$ wahr.

Es gibt viele Varianten dieses Prinzips.

Vollständige Induktion [Slide 46]

Zu beweisen:

Induktionsanfang: Die Proposition ist für $n = n_0$ wahr.

Induktionsschritt: Ist die Proposition für ein beliebiges n wahr, dann ist sie auch für $n + 1$ wahr.

Beispiel

Proposition: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: $n = 0$

Induktionsschritt: Angenommen, die Proposition sei für n wahr. Dann gilt $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

- Im Induktionsschritt ist die erste Gleichung aufgrund der Induktionsannahme wahr; wir haben lediglich $n + 1$ auf beiden Seiten hinzuaddiert.
- Die zweite Gleichung können wir leicht verifizieren.
- Die Ausdrücke ganz links und ganz rechts entsprechen exakt der Proposition, außer dass n durch $n + 1$ ersetzt wurde. Wir haben gezeigt, dass sie gleich sind, genau wie in der Proposition. Damit haben wir die Proposition für den Nachfolger von n bewiesen.
- Da n beliebig gewählt werden kann, haben wir damit (per Induktion) die Proposition für alle Werte von $n > 0$ bewiesen.

Vollständige Induktion [Slide 47]

Zu beweisen:

Induktionsanfang: Die Proposition ist für $n = n_0$ wahr.

Induktionsschritt: Ist die Proposition für ein beliebiges n wahr, dann ist sie auch für $n + 1$ wahr.

Beispiel

Proposition: $F(n) < 2^n$, wobei F die Fibonacci-Funktion ist, definiert durch $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ für $n > 1$.

Induktionsanfang: $F(0) < 2^0$ und $F(1) < 2^1$.

Dies ist ein *doppelter* Induktionsanfang, für zwei *aufeinander folgende* Werte von n. Im Induktionsschritt gehen wir also ebenfalls von zwei aufeinander folgenden Werten aus, für die die Induktionsannahme gelte:

Induktionsschritt: Angenommen, die Proposition sei für $F(n-2)$ und $F(n-1)$ wahr. Dann gilt $F(n) = F(n-2) + F(n-1) < 2^{n-2} + 2^{n-1} < 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Schleifeninvarianten [Slide 48]

Ähnliches Prinzip wie vollständige Induktion

Zu beweisen:

Schleifenvoraussetzung: P_0 gilt direkt vor der Schleife.

Schleifeninvarianz: Gilt P_{i-1} vor Iteration i, dann gilt P_i nach Iteration i.

Schleifenkonsequez: Die endgültige Proposition P_k gilt unmittelbar nach dem Schleifenausstieg.

Beispiel

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing
           n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum
          element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

Schleifeninvarianten [Slide 49]

Beispiel

```
Algorithm arrayMax(A,n):
  Require: An array A storing
        n ≥ 1 integers.
  Ensure: Return the maximum
        element in A.
  m ← A[0]
  for i ← 1 to n − 1 do
    if m < A[i] then
      m ← A[i]
  return m
```

Invariante P_i: $m = \max\{A[0, ..., i]\}$

Schleifenvoraussetzung:
$P_0 : m = \max\{A[0]\} = A[0]$.

Schleifeninvarianz: Gelte P_{i-1} vor Iteration i, also $P_{i-1} : m = \max\{A[0, \dots, i-1]\}$.

- Falls $m < A[i]$, wird m auf $A[i]$ gesetzt.
- Andernfalls bleibt m unverändert.

In beiden Fällen gilt hinterher
$P_i : m = \max\{A[0, \dots, i]\}$.

Schleifenkonsequenz: Es gilt
$P_{n-1} : m = \max\{A[0, \dots, n-1]\}$.

6 Zusammenfassung

Zusammenfassung [Slide 50]

- Komplexität:
  - Asymptotische Analyse
    - Groß-O
    - Tilde-Approximation
  - Die Laufzeit-Komplexität eines Algorithmus dominiert die Effizienz seiner Implementation.
- Beweistechniken:
  - durch (Gegen-)*Beispiel*
  - durch *Kontraposition* und *Widerspruch*
  - durch *vollständige Induktion*
  - durch *Schleifeninvarianz*

Bibliographie [Slide 51]

Goodrich, Michael, Roberto Tamassia und Michael Goldwasser (Aug. 2014). *Data Structures and Algorithms in Java*. Wiley.

Sedgewick, Robert und Kevin Wayne (2014). *Algorithmen*. Pearson.